

Análise Matemática III

2º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 4 (a entregar na semana de 27/03/2006)

4A Determine o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y + 2x < 2, 0 < y - x < 2, 2 - x^2 - y^2 < z < 3 - x^2 - y^2\}$$

usando uma transformação de coordenadas adequada.

4B Calcule o momento de inércia, em relação ao eixo Oz , da nave espacial

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 \right\}.$$

sabendo que a respectiva densidade de massa é constante igual a 1 (está cheia de água).

Resolução

4A A função de classe C^1

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= -x + y \\ w &= x^2 + y^2 + z \end{cases} \quad (1)$$

transforma S num paralelepípedo com faces paralelas aos planos coordenados (ou intervalo)

$$h(S) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < 2, 0 < v < 2, 2 < w < 3\}.$$

A matriz Jacobiana de h é

$$Dh(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto o Jacobiano

$$Jh = \det(Dh) = 3,$$

é constante e diferente de zero. Verifica-se facilmente que a função h tem inversa, pelo que define uma transformação de coordenadas e podemos aplicar o teorema

de mudança de coordenadas de integração. Vamos precisar do Jacobiano da função inversa, $J(h^{-1})$,

$$J(h^{-1}) = \frac{1}{J(h)} = \frac{1}{3}.$$

O volume de S é então dado por

$$Vol(S) = \iiint_S 1 \, dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 \int_2^3 1 \cdot \frac{1}{3} \, dw dv du = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

4B Em coordenadas cilíndricas

$$g : \begin{cases} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \\ z &= z, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} g^{-1}(D) &: |z| \leq 1 - (\rho - 3)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 + (\rho - 3)^2 \leq z \leq 1 - (\rho - 3)^2, \end{aligned}$$

pelo que o corte de $g^{-1}(D)$ com $\theta = \text{const}$ é, no plano $O\rho z$, a região entre duas parábolas com eixo $\rho = 3$. O momento de inércia, em relação ao eixo Oz , da nave espacial com densidade de massa $\sigma = 1$ é

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_D d_z^2 \sigma \, dx dy dz = \iiint_D (x^2 + y^2) \cdot 1 \, dx dy dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_2^4 \int_{-1+(\rho-3)^2}^{1-(\rho-3)^2} \rho^2 \cdot \rho \, dz d\rho d\theta = \int_2^4 \int_{-1+(\rho-3)^2}^{1-(\rho-3)^2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho \, d\theta dz d\rho = \\ &= 2\pi \int_2^4 \rho^3 \cdot 2 \left(1 - (\rho - 3)^2\right) \, d\rho = \\ &= 4\pi \left[-\frac{\rho^6}{6} + \frac{6}{5}\rho^5 - 2\rho^4 \right]_2^4 = 4^4 \frac{3}{5} \pi \cong 482,6. \end{aligned}$$