

Análise Matemática III

1º semestre de 2004/2005

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 13/12/2002)

Considere a superfície M definida por

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 < z < e \right\}.$$

- (a) Calcule a massa de M sabendo que a sua densidade de massa é dada por

$$\sigma(x, y, z) = \frac{2e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- (b) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (-y, x, z)$. Calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária que tem terceira componente negativa, usando

- (i) a definição de fluxo;
- (ii) o Teorema da Divergência.

Resolução

- a) Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , temos

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

e M é definida por $e^\rho = z$ com $0 < \rho < 1$. Uma parametrização para M com exceção dos pontos com $y = 0, x > 0$, é dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, e^\rho), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < 1.$$

Temos então

$$D_1 g \times D_2 g = \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & e^\rho \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-\rho e^\rho \cos \theta, -\rho e^\rho \sin \theta, \rho)$$

e $\|D_1 g \times D_2 g\| = \rho \sqrt{1 + e^{2\rho}}$. Assim, a massa de M é dada por

$$\begin{aligned} \text{Massa}(M) &= \int_M \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sigma(g(\rho, \theta)) \|D_1 g \times D_2 g\| d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2e^{2\rho}}{\rho} \rho \sqrt{1 + e^{2\rho}} d\rho d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} [(1 + e^{2\rho})^{3/2}]_0^1 = \frac{4\pi}{3} ((1 + e^2)^{3/2} - 2^{3/2}). \end{aligned}$$

b)i) O vector $D_1 g \times D_2 g$ calculado na alínea anterior tem sempre a 3ª componente positiva, pelo que é necessário trocar o sinal para calcular o fluxo.

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot n dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_1 g \times D_2 g) d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, e^\rho) \cdot (-\rho e^\rho \cos \theta, -\rho e^\rho \sin \theta, \rho) d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho e^\rho d\rho d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

b) ii) F é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ pelo que podemos aplicar o teorema da divergência à região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{\sqrt{x^2 + y^2}} < z < e\}.$$

A fronteira de D é formada por M e pelo disco

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = e\}.$$

Uma vez que a normal a M dada é a normal exterior a D , o teorema da divergência diz que

$$\int_D \text{div } F dx dy dz = \int_M F \cdot n dS + \int_S F \cdot (0, 0, 1) dS$$

onde $(0, 0, 1)$ é a normal exterior ao disco S .

Como $\operatorname{div} F = 1$ conclui-se que

$$\int_M F \cdot n \, dS = \operatorname{vol}(D) - \int_S F \cdot (0, 0, 1) \, dS.$$

Temos então

$$\operatorname{vol}(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{e^\rho}^e \rho \, dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho(e - e^\rho) \, d\rho = \pi(e - 2)$$

e, visto que no disco S o campo F é dado por $F(x, y, z) = (-y, x, e)$, obtemos

$$\int_S F \cdot (0, 0, 1) \, dS = \int_S e \, dS = e \cdot \text{área}(S) = e\pi.$$

Podemos assim concluir que

$$\int_M F \cdot n \, dS = \pi(e - 2) - e\pi = -2\pi.$$