Análise Matemática III

1º semestre de 2004/2005

Exercício Teste 10 (a entregar na semana de 29/11/2004)

Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\,;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Mostre que V é uma variedade e determine a respectiva dimensão.
2. Descreva o espaço normal a V no ponto $(0,0,1)$.
3. Parametrize a variedade V.
4. Determine os pontos de máximo da função $f(x,y,z) = x^2 + y$, em V.

Resolução:

1. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

   $$F(x,y,z) = (x - y\,,\, x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

   Então, da definição de V, temos

   $$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}.$$

   Sendo polinomial em cada uma das suas componentes, a função F é de classe C^1. A respectiva matriz Jacobiana,

   $$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix},$$

   tem característica igual a 2 em V. De facto, se tal não acontecesse, então os determinantes das submatrizes 2×2 seriam nulos e teríamos

   $$x + y = 0\;;\; z = 0,$$

   o que não está de acordo com a definição de V.

   Portanto, V é uma variedade de dimensão igual a 1.

2. Sabendo que as linhas de $DF(x,y,z)$ geram o espaço normal a V no ponto (x,y,z), então o conjunto $\{(1,-1,0)\,,\,(0,0,2)\}$ é uma base do espaço normal a V no ponto $(0,0,1)$.

3. Da definição de V temos $x = y\,;\, 2x^2 + z^2 = 1$ e, portanto, consideremos a função

   $$g(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,,\, \operatorname{sen} t)\;;\; 0 < t < 2\pi.$$

   É claro que g é de classe C^1. Sendo $0 < t < 2\pi$, então g é injectiva. Além disso,

   $$g'(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\,,\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\,,\, \cos t) \neq (0,0,0)$$

e, portanto, g é uma parametrização de $V \setminus \{(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0)\}$.

Seja

$$h(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,,\,\operatorname{sen} t)\ ;\ -\pi < t < \pi.$$

Do mesmo modo se conclui que h é uma parametrização de $V \setminus \{(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0)\}$.

Assim, as funções g e h parametrizam V.

4. Dado que

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (F_1(x,y,z)\,,\,F_2(x,y,z)) = (0,0),$$

recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange, os extremos de f em V são pontos de estacionaridade da função $f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, ou seja, são soluções do sistema

$$\begin{aligned} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ 2\lambda_2 z = 0 \\ x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

Da terceira equação temos $\lambda_2 = 0$ ou $z = 0$.

Com $\lambda_2 = 0$, da segunda equação obtemos $\lambda_1 = 1$ e, da primeira equação, $x = -\frac{1}{2}$. Da quarta e da quinta equações concluimos que

$$(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2})\ ;\ (-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

são pontos de estacionaridade de $f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$.

Por outro lado, fazendo $z = 0$, da quarta e da quinta equações, concluimos que

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0)\ ;\ (\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0)$$

são também pontos de estacionaridade de $f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$.

Sendo

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}) &= -\frac{1}{4} \\ f(-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2}) &= -\frac{1}{4} \\ f(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

então, $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0)$ é o ponto de máximo de f em V.