

ANÁLISE MATEMÁTICA III
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEC, LET, LEAN, LCI, LEA, LEBM, LEFT E
LMAC
TESTES DE RECUPERAÇÃO – 4 DE JANEIRO DE 2006

Apresente e justifique todos os cálculos

Duração: hora e meia (9:00-10:30)

1º Teste

- (1) Considere a região D de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < x + y\}.$$

- (3 val.) (a) Dada uma função integrável, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, utilize o teorema de Fubini para obter uma expressão para $\iiint_D f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

- (3 val.) (b) Calcule o volume da região D .

- (2) Considere o conjunto aberto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < e, \log(x) < y < 1 + \log(x)\}$.

- (2.5 val.) (a) Mostre que a função $g :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow V$ definida por $g(u, v) = (e^u, u + v)$ é uma mudança das coordenadas.

- (2.5 val.) (b) Calcule $\int_V \frac{y}{x}$.

- (3) Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(0, 0, z).$$

- (3 val.) (a) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo fechado. É um gradiente? Em caso afirmativo determine uma função potencial $\phi(x, y, z)$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ e $\phi(0, 0, 1) = 1$.

- (3 val.) (b) Calcule $\int_C (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}$ onde C é a curva parametrizada por

$$g(\theta) = (\sin\theta \cos 4\theta, \sin\theta \sin 4\theta, \cos\theta), \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- (3 val.) (4) Sejam $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathbf{C}^2$ definidas no aberto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$, e seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Mostre que

$$\int_D f \Delta g - g \Delta f = \int_{\partial D} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot (x, y) ds,$$

onde, para uma função h de classe $\mathbf{C}^2$, $\Delta h(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ e $\nabla h(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$.

2º Teste

(1) Considere o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y^2 + z^2 ; x + y = 1\}.$$

(2 val.)

(a) Mostre que C é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(2.5 val.)

(b) Determine $T_{(1,0,\sqrt{2})}C$ e $(T_{(1,0,\sqrt{2})}C)^\perp$.

(2 val.)

(c) Utilize o teorema da função implícita para mostrar que, numa vizinhança U do ponto $(1, 0, \sqrt{2})$, a variedade C coincide com o gráfico de uma função, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 ,

$$C \cap U = \{(\varphi_1(y), y, \varphi_2(y)) , y \in I\},$$

onde I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ que contém $y = 0$.

(2.5 val.)

(d) Calcule $\varphi'_2(0)$ com a ajuda do teorema da função implícita. Obtenha $\varphi_2(y)$ de forma explícita e confirme o valor de $\varphi'_2(0)$.

(2) Considere as superfícies:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, z > 1\} \quad \text{e}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z < 1\},$$

e o campo vectorial $F = (0, 0, z)$.

(2.5 val.)

(a) Calcule, pela definição, o fluxo de F através de S_1 no sentido da normal com terceira componente positiva.

(2.5 val.)

(b) Calcule, pela definição, o fluxo de F através de S_2 no sentido da normal com terceira componente positiva.

(3 val.)

(c) Use o teorema da divergência para calcular o volume da região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2 - x^2 - y^2\}.$$

(3 val.)

(3) Estude a integrabilidade da função

$$f(x, y) = \frac{e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2}}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^{\frac{3}{4}}} (1 + 2\sin(xy)),$$

na região $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$. Caso seja integrável encontre um majorante para $|\int_D f|$.