

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 29 DE OUTUBRO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + x^2\}.$$

(3 val.)

(a) Calcule o integral $\iiint_S (x+1)y$.

(3 val.)

(b) Dada uma função f integrável em S , escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz.$$

RESOLUÇÃO:

(a) A região S é constituída pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y) no rectângulo $[-1, 1] \times [0, 1]$ e com coordenada z entre o plano $z = 0$ e a superfície $z = 1 + x^2$. Como esta superfície se obtém trasladando o gráfico da parábola $z = 1 + x^2$ (no plano xOz) ao longo do eixo Oy , obtemos o seguinte esboço:

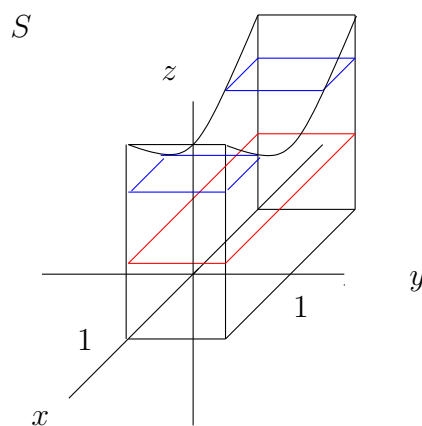


FIGURE 1

O integral pedido pode ser calculado facilmente por um integral iterado na ordem $dz \, dx \, dy$. De facto, se fixarmos $y \in [0, 1]$, obtemos os seguintes cortes verticais:

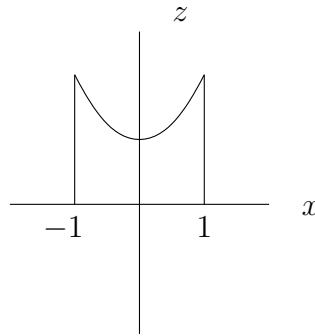


FIGURE 2

e então o integral pedido é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \iiint_S (x+1)y &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1+x^2} (x+1)y \, dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1+x^2)(1+x)y \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1+x+x^2+x^3)y \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 y \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^1 y \, dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z . Do esboço acima, é claro que, se fixarmos z , obtemos os cortes representados na Figura 1.

Com efeito, se fixarmos $z \in [0, 1]$, obtemos como corte um rectângulo com $x \in [-1, 1]$ e $y \in [0, 1]$:

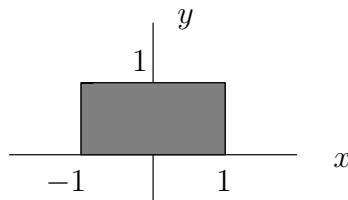


FIGURE 3

Se fixarmos $z \in [1, 2]$ obtemos como corte dois rectângulos:

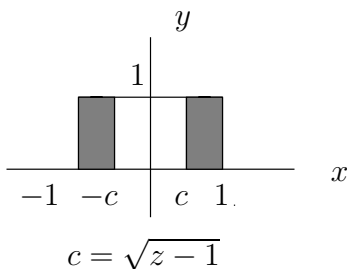


FIGURE 4

O integral iterado escreve-se então:

$$\begin{aligned} \iiint_S f &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{z-1}} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{z-1}}^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

(3 val.)

(2) Calcule a massa do sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\},$$

cujas densidade de massa é a função $\sigma(x, y, z) = \frac{y^2 z}{x^2 + y^2}$.

RESOLUÇÃO: O conjunto B é a região entre a superfície de revolução $z = x^2 + y^2 - 1$, o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, e o plano $z = 0$, com $y > 0$.

Assim, vamos utilizar uma transformação $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas em relação ao eixo Oz :

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ z &= z. \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(\rho, \theta, z))| = \rho$$

e, nestas coordenadas, a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \theta < \pi, 1 < \rho < 2, 0 < z < \rho^2 - 1\}.$$

Fazendo um corte com θ constante ($0 < \theta < \pi$) obtemos a seguinte figura:

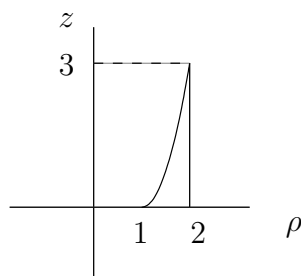


FIGURE 5

Assim, como $\sigma(g(\rho, \theta, z)) = z \sin^2 \theta$, a massa do sólido B é dada por

$$\begin{aligned}
 M(B) &= \iiint_B \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{g^{-1}(B)} \rho \, z \sin^2 \theta \, dz \, d\rho \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_1^2 \int_0^{\rho^2-1} \rho \, z \sin^2 \theta \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 \rho \sin^2 \theta \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\rho^2-1} d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_1^2 \rho (\rho^2 - 1)^2 \sin^2 \theta \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{12} \int_0^\pi \sin^2 \theta [(\rho^2 - 1)^3]_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
 &= \frac{9}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{9\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

(3) Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{4 - x^2 - y^2}(x, y, z + x), \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (2x(y - 1), x^2, 1).$$

- Indique se o campo $\mathbf{G}$ é gradiente no seu domínio e, em caso afirmativo, calcule uma função potencial. (2 v)
- Calcule $\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}$ onde C é o segmento de recta entre $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2\pi)$, orientado no sentido ascendente. (2 v)
- Calcule $\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\gamma$, onde Γ é a curva descrita por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. (2 v)
- Sem calcular as derivadas parciais de F indique, justificando, se F é um campo fechado. (2 v)

RESOLUÇÃO:

(a) G é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_1}{\partial y} &= 2x = \frac{\partial G_2}{\partial x} \\
 \frac{\partial G_1}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial G_3}{\partial x} \\
 \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial G_3}{\partial y},
 \end{aligned}$$

pelo que G é um campo fechado. Como o domínio de G , $\mathbb{R}^3$, é um conjunto simplesmente conexo, conclui-se que G é um gradiente.

Um potencial ϕ para G obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x(y-1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(x, y, z) = x^2(y-1) + C_1(y, z) \\ \phi(x, y, z) = x^2y + C_2(x, z) \\ \phi(x, y, z) = z + C_3(x, y) \end{cases}$$

donde se conclui que um potencial para G é dado por

$$\phi(x, y, z) = x^2(y-1) + z.$$

(b) Para calcular $\int_C F \cdot dg$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C no sentido indicado dada por $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $g(t) = (1, 0, t)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dg &= \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (1, 0, t+1) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} t+1 dt = \frac{2\pi}{3}(\pi+1). \end{aligned}$$

Para calcular $\int_C G \cdot dg$, como G é um gradiente, usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$\int_C G \cdot dg = \phi(1, 0, 2\pi) - \phi(1, 0, 0) = 2\pi.$$

$$\text{Assim, } \int_C (F + G) \cdot dg = \frac{2\pi}{3}(\pi+1) + 2\pi.$$

(c) Para calcular $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ temos,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t + \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} t + \cos t dt = \frac{2\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Para calcular $\int_C G \cdot dg$, como G é um gradiente e a curva Γ tem os mesmos pontos inicial e final que a curva C , usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$\int_\Gamma G \cdot d\gamma = \int_C G \cdot dg = 2\pi.$$

$$\text{Assim, } \int_C (F + G) \cdot dg = \frac{2\pi^2}{3} + 2\pi.$$

(d) O domínio do campo F é o conjunto $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4\}$. Como as curvas C e Γ são homotópicas em D , se F fosse um campo fechado teríamos, pela invariância de integrais de linha de campos fechados ao longo de curvas homotópicas, $\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot dg$. No entanto, como foi visto nas

alíneas anteriores, estes dois integrais são diferentes, pelo que se conclui que F não é um campo fechado.

Alternativamente, podemos considerar $\tilde{g} := g \cup (-\gamma)$, um caminho fechado no interior do cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4\}$. Então, se F fosse um campo fechado, seria um gradiente no interior do conjunto simplesmente conexo $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 4\}$ e teríamos $\int_{C \cup (-\Gamma)} F \cdot \tilde{g} = 0$. No entanto, pelas alíneas anteriores temos

$$\int_{C \cup (-\Gamma)} F \cdot d\tilde{g} = \int_C F \cdot dg - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \frac{2\pi^2}{3} + 2\pi - \frac{2\pi^2}{3} = 2\pi \neq 0,$$

pelo que se conclui que F não é um campo fechado.

- (4) Seja R um domínio regular de $\mathbb{R}^2$ limitado por uma curva simples regular C . Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, uma parametrização regular de C . Demonstre a seguinte fórmula para a área de R :

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (x y' - y x') dt.$$

Utilizando esta fórmula, calcule a área da região do plano limitada pela curva $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + \frac{(y-y_0)^2}{k^2} = 1 \right\}$, em que $h, k > 0$ e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:

Considerando o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-y, x)$ temos, pelo teorema de Green,

$$\int_C F \cdot d\alpha = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_R 2 dx dy = 2\text{Área}(R),$$

onde $P(x, y) = F_1(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = F_2(x, y) = x$.

Por outro lado, pela definição de integral de linha de um campo vectorial, temos

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (-y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b (x y' - y x') dt, \end{aligned}$$

pelo que

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt.$$

Utilizando esta fórmula e a parametrização da curva C dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + h \cos t, y_0 + k \sin t), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi],$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Área}(R) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k(x_0 + h \cos t) \cos t + h(y_0 + k \sin t) \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x_0 k \cos t + y_0 h \sin t + h k dt \\ &= \frac{1}{2} [x_0 k \sin t - y_0 h \cos t + h k t]_0^{2\pi} = h k \pi.\end{aligned}$$