

Análise Matemática III

Cursos LEAM, LEB, LEEC, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEQ, LQ

1º Teste - 30 de Outubro de 2004

Resolução

1. Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq e^x\}.$$

3.5 val.

(a) Calcule o integral $\iiint_S \sin y$.

3.5 val.

(b) Dada uma função integrável, f , em S escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz.$$

RESOLUÇÃO:

(a) A região S é constituída pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y) no rectângulo $[0, 1] \times [0, \pi]$ e com coordenada z entre o plano $z = 0$ e a superfície $z = e^x$. Como esta superfície se obtém transladando o gráfico da exponencial (no plano xOz) ao longo do eixo Oy , obtemos o seguinte esboço:

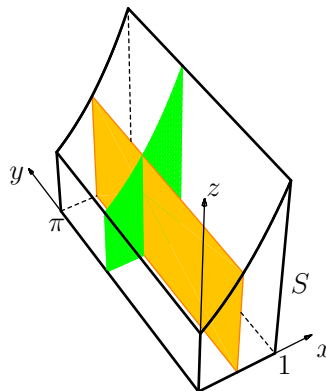


Figura 1:

O integral pedido pode ser calculado facilmente por um integral iterado na ordem $dz \, dx \, dy$. De facto, se fixarmos $y \in [0, \pi]$, obtemos os seguintes cortes verticais:

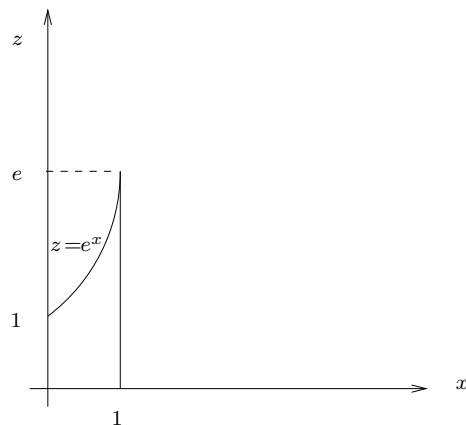


Figura 2: Corte em S segundo y constante com $0 < y < \pi$

e então o integral pedido é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \iiint_S \sin y &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{e^x} \sin y \, dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (e^x \sin y) \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^\pi [e^x \sin y]_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= (e - 1) \int_0^\pi \sin y \, dy = (e - 1)[- \cos y]_{y=0}^{y=\pi} = 2(e - 1).
 \end{aligned}$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z . Do esboço acima, é claro que, se fixarmos z , obtemos os seguintes cortes:

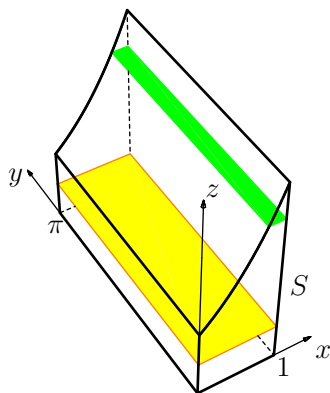


Figura 3:

Com efeito, se fixarmos $z \in [0, 1]$, obtemos como corte um rectângulo com $x \in [0, 1]$ e com $y \in [0, \pi]$:

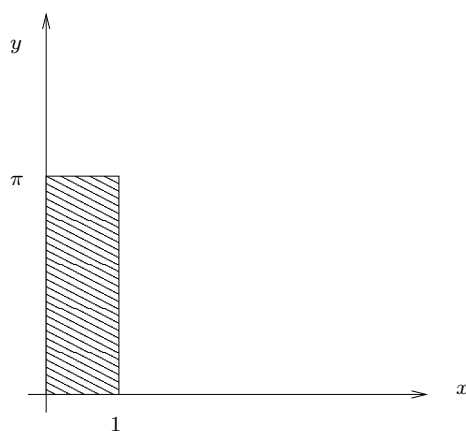


Figura 4: Corte em S segundo z constante com $0 < z < 1$.

Se fixarmos $z \in [1, e]$ obtemos como corte um rectângulo:

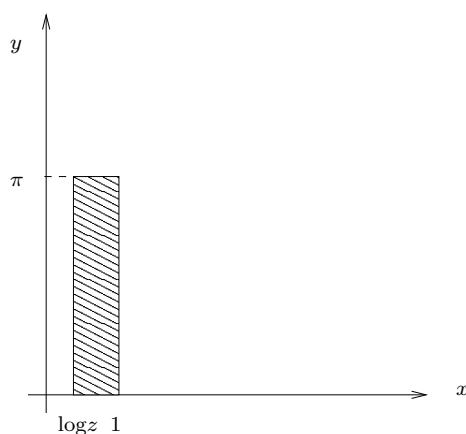


Figura 5: Corte em S segundo z constante com $1 < z < e$.

O integral iterado escreve-se então:

$$\begin{aligned} \iiint_S f &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_1^e \left(\int_0^\pi \left(\int_{\log z}^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

4 val.

- Use coordenadas cilíndricas para calcular a coordenada $\bar{x}$ do centróide do seguinte sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x; 1 - \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - 2(x^2 + y^2)\}.$$

RESOLUÇÃO: O conjunto B é a região entre as superfícies de revolução $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 2 - 2(x^2 + y^2)$:

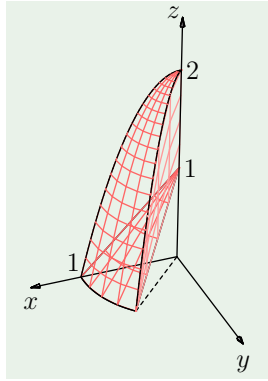


Figura 6:

Assim, vamos utilizar uma transformação $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas em relação ao eixo Oz :

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ z &= z. \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(\rho, \theta, z))| = \rho$$

e, nestas coordenadas, a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, 0 < \rho < 1, 1 - \rho < z < 2 - 2\rho^2\}.$$

Assim, o volume do sólido B é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{g^{-1}(B)} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_{1-\rho}^{2-2\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (\rho + \rho^2 - 2\rho^3) \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

e a coordenada $\bar{x}$ do centróide é dada por:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B x \, dx \, dy \, dz \\
 &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_{1-\rho}^{2-2\rho^2} \rho^2 \cos \theta \, dz \, d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (\rho^2 + \rho^3 - 2\rho^4) \cos \theta \, d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \left[\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - 2\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\
 &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \left([\sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\text{Vol}(B)} \frac{11\sqrt{2}}{120} = \frac{11\sqrt{2}}{10\pi}.
 \end{aligned}$$

3. Considere o seguinte campo de forças definido em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ excepto nos pertencentes aos eixos Ox e Oy :

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{z}{x^2 + z^2}, \frac{z}{y^2 + z^2}, \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{y}{y^2 + z^2} \right).$$

- 1.5 val. (a) Mostre que F é um campo fechado.
- 2 val. (b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva C_1 definida por $y = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(0, 10, 0)$.
- 2 val. (c) Calcule o trabalho de F ao longo da curva C_2 definida por $x = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$.
- 1.5 val. (d) Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida por $x = y$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$.

RESOLUÇÃO:

(a) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0), (0, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y},\end{aligned}$$

pelo que F é um campo fechado no seu domínio.

(b) O campo F pode ser decomposto na soma de dois campos fechados G e H dados por

$$\begin{aligned}G &= \left(-\frac{z}{x^2 + z^2}, 0, \frac{x}{x^2 + z^2} \right) \\ H &= \left(0, \frac{z}{y^2 + z^2}, -\frac{y}{y^2 + z^2} \right),\end{aligned}$$

e então $\int_{C_1} F \cdot dg_1 = \int_{C_1} G \cdot dg_1 + \int_{C_1} H \cdot dg_1$.

Para calcular $\int_{C_1} H \cdot dg_1$ notamos que H é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e que a curva C_1 é homotópica, nesse conjunto, a um ponto, pelo que, pela invariância de integrais de linha ao longo de caminhos homotópicos, temos $\int_{C_1} H \cdot dg_1 = 0$.

Para calcular $\int_{C_1} G \cdot dg_1$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C_1 no sentido indicado dada por $g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $g_1(\theta) = (\cos \theta, 1, -\sin \theta)$. Assim, o trabalho realizado por G ao longo de C_1 é dado por

$$\begin{aligned}\int_{C_1} G \cdot dg_1 &= \int_0^{2\pi} G(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin \theta, 0, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, 0, -\cos \theta) \, d\theta = -2\pi,\end{aligned}$$

pelo que $\int_{C_1} F \cdot dg_1 = -2\pi + 0 = -2\pi$.

(c) Novamente, $\int_{C_2} F \cdot dg_2 = \int_{C_2} G \cdot dg_2 + \int_{C_2} H \cdot dg_2$.

Para calcular $\int_{C_2} G \cdot dg_2$ notamos que G é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e que a curva C_2 é homotópica, neste conjunto, a um ponto, pelo que, pela invariância de integrais de linha ao longo de caminhos homotópicos, temos $\int_{C_2} G \cdot dg_2 = 0$.

Para calcular $\int_{C_2} H \cdot dg_2$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C_2 no sentido indicado dada por $g_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $g_2(\theta) = (1, \cos \theta, \sin \theta)$. Assim,

o trabalho realizado por H ao longo de C_2 é dado por

$$\begin{aligned}\int_{C_2} H \cdot dg_2 &= \int_0^{2\pi} H(g_2(t)) \cdot g_2'(t) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (0, \sin \theta, -\cos \theta) \cdot (0, -\sin \theta, \cos \theta) d\theta = -2\pi,\end{aligned}$$

pelo que $\int_{C_2} F \cdot dg_2 = 0 - 2\pi = -2\pi$.

(d) Novamente temos $\int_{C_3} F \cdot dg = \int_{C_3} G \cdot dg_3 + \int_{C_3} H \cdot dg_3$. Como G é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$ e C_3 é homotópica, neste conjunto, à curva C_1 percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0, 10, 0)$, temos que $\int_{C_3} G \cdot dg_3 = -\int_{C_1} G \cdot dg_1 = 2\pi$. Por outro lado, H é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ e C_3 é homotópica neste conjunto à curva C_2 percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto $(10, 0, 0)$, pelo que $\int_{C_3} G \cdot dg_3 = \int_{C_2} G \cdot dg_2 = -2\pi$. Conclui-se então que $\int_{C_3} F \cdot dg = 2\pi - 2\pi = 0$.

2 val.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{2} \sin(x^2 + 2y), f(y) \right)$$

e o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; \frac{\pi}{2} < x^2 + 2y < \pi\}.$$

Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da fronteira do conjunto D percorrida uma vez no sentido anti-horário.

RESOLUÇÃO: O campo F é de classe C^1 em D e este conjunto é uma união de

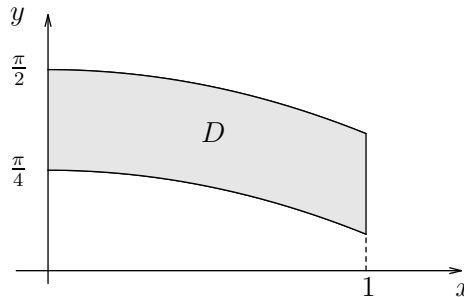


Figura 7:

um número finito de domínios elementares. Podemos então aplicar o teorema de Green com $P(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 2y)$ e $Q(x, y) = f(y)$, e obter

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} F \cdot dg &= \int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= - \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{2}} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \int_0^1 [P(x, y)]_{y=\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2}}^{y=\frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi \right) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$