

Análise Matemática III

1º Exame e 2º Teste – 11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

Resolução

1. Integrando primeiro em ordem a y e depois em ordem a x temos

$$\begin{aligned}\iint_D f &= \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} yx \, dydx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

2. (a) A expressão para o volume de V é dada por

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{(2-z)^2-y^2}} dx \right) dy + \int_1^{2-z} \left(\int_0^{\sqrt{(2-z)^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

- (b) A resposta é, utilizando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}\int_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \left(\int_0^{2-\rho} \rho^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 dz \right) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta)^2 d\theta \right) \left(\int_1^2 \rho^4 (2-\rho) d\rho \right) \\ &= \left[\frac{\sin(\theta)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{2\rho^5}{5} - \left(\frac{\rho^6}{6} \right) \right]_1^2 = \frac{19}{30}.\end{aligned}$$

3. (a) Temos que

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^4; \partial_2 f_3 = \partial_3 f_2 = 0; \partial_1 f_3 = \partial_3 f_1 = 0.$$

Portanto f é fechado.

- (b) O trabalho de f ao longo de uma circunferência horizontal que dê a volta ao eixo dos z não é zero pelo que f não é um gradiente. Basta tomar $\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ para obter $\oint f d\alpha = 2\pi \neq 0$.

- (c) Separemos $f = g + h$ onde $g(x, y, z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ e $h(x, y, z) = (x, y, z^2)$.

O arco de circunferência, chamemos-lhe γ , em questão está contido no plano vertical $x = 0$. Ora, o campo g é perpendicular a este plano porque $g(0, y, z) = (-1/y, 0, 0)$. Logo o trabalho de g é nulo ao longo do arco de circunferência pretendido.

Por outro lado, h é claramente um gradiente em $\mathbb{R}^3$ com $h(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$ e $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2)/2 + z^3/3$.

Os pontos inicial e final do arco de circunferência percorrido no sentido crescente dos z são respectivamente $(0, \sqrt{3}, -1)$ e $(0, \sqrt{3}, 1)$. Logo temos o trabalho,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} h = \phi(0, \sqrt{3}, 1) - \phi(0, \sqrt{3}, -1) = \frac{2}{3}.$$

4. A área do rectângulo é dada pela função $f(x, y) = 4xy$. Devemos por isso determinar o máximo de f sujeito à restrição $x^2 + 4y^2 = 1$. Como f é contínua e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\}$ é compacto, o problema tem solução. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, e atendendo a que $x = y = 0$ não é solução do sistema, vem

$$\begin{cases} 4y + 2\lambda x = 0 \\ 4x + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 4 \\ 4 & 8\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Resolvendo as primeiras equações para $\lambda = \pm 1$ obtemos $x = \pm 2y$. Substituindo na última equação vem

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Como $|f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{2}})| = 1$ concluímos que o maior rectângulo inscrito na elipse tem área 1.

5. (a) Seja $G(x, y, z) = y + x^2 + z^2 - 4$. Temos

$$S = \{(x, y, z) \in S : (x, y, z) = 0, 0 < y < 3\},$$

e $DG(1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Logo o espaço normal no ponto $p = (1, 2, 1)$ é

$$(T_p S)^\perp = \{(2\lambda, \lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (b) (i) Sejam P_1 e P_3 as superfícies planas definidas por

$$P_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 4, y = 0\}$$

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1, y = 3\}$$

e seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior ao sólido V limitado por $S \cup P_0 \cup P_1$. Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_{P_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_{P_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Ora, temos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, em P_0 , e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3$, em P_1 , logo

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = - \iint_{P_1} 3 = -3 \text{vol}_2(P_1) = -3\pi.$$

- (ii) Consideremos a parametrização $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, 4 - \rho^2, \rho \sin \theta)$, $(\rho, \theta) \in]1, 2[\times]0, 2\pi[$, para S . Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & -2\rho & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & 0 & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = (-2\rho^2 \cos \theta, -\rho, -2\rho^2 \sin \theta).$$

Como esta normal aponta para o interior do sólido V , vem

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \\
 &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \theta, 4 - \rho^2, 2\rho \cos \theta - \rho \sin \theta) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, \rho, 2\rho^2 \sin \theta) d\theta \right) d\rho \\
 &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (4\rho - \rho^3 - 2\rho^3 \sin^2 \theta) d\theta \right) d\rho \\
 &= 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right]_1^2 \\
 &= -3\pi.
 \end{aligned}$$

- (iii) Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}$. Recorde-se que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, i.e., se $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = z^2 \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2x - z \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre supor que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_1 = 0$. Então obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x - z \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = -xy + f(y, z) \\ A_2 = x^2 - xz + g(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = z^2 \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $g = 0$ e $f = yz^2$. Um potencial vector para F é então

$$\mathbf{A} = (0, x^2 - xz, yz^2 - xy).$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$\iint_S F \cdot n = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot n = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\alpha,$$

onde α é um caminho que percorre ∂S no sentido compatível com a normal exterior n , e $\nabla \times \mathbf{A}$ representa o rotacional de $\mathbf{A}$. Ora,

$$\partial S = C_1 \cup C_0$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, y = 3\},$$

pelo que α percorre C_0 no sentido positivo e C_1 no sentido negativo, em relação

a um observador no ponto $(0, 4, 0)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} A \cdot d\alpha &= \int_0^{2\pi} (0, 4 \cos^2 t - 4 \cos t \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 0, -2 \cos t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, \cos^2 t - \sin t \cos t, 3 \sin^2 t - 3 \cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t dt \\ &= -3\pi.\end{aligned}$$

6. As funções

$$f_n(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2/4+z^2)}{[x^2+y^2/4]^2} & \text{para } (x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq n^2 \\ 0 & \text{para } (x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} > n^2 \end{cases} \quad (1)$$

são, para todo o n , contínuas num compacto e zero fora do compacto pelo que são integráveis em D . Por outro lado a sucessão $\{f_n\}$ converge para f em toda a parte em D . A sucessão não é no entanto monótona qtp em D pelo que tentaremos aplicar o teorema de convergência dominada de Lebesgue. Para $h(x, y, z) = \frac{1}{[x^2+y^2/4]^2}$ temos $|f_k| \leq h, \forall k \in \mathbb{N}$, em D . Para mostrar a integrabilidade de f falta mostrar que h é integrável. Consideremos a sucessão $\{h_k\}$ de funções integráveis construída de forma análoga a (1)

$$h_n(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{[x^2+y^2/4]^2} & \text{para } (x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq n^2 \\ 0 & \text{para } (x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} > n^2 \end{cases}$$

Esta sucessão é monótona crescente e converge em toda a parte em D para h . Para mostrar, pelo teorema de convergência monótona de Levi, que h é integrável falta mostrar que a sucessão numérica $\{\iiint_D h_k\}$ é majorada. Fazendo a transformação de coordenadas

$$g : \begin{cases} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= 2\rho \sin(\theta) \\ z &= z \end{cases}$$

com $\det(Dg) = 2\rho$ temos

$$\iiint_D h_k = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_1^k \frac{1}{\rho^4} 2\rho \, d\rho d\theta dz = 8\pi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) < 4\pi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim h é integrável e portanto f também é integrável em D . Por outro lado

$$\iiint_D h = \lim_{k \rightarrow \infty} \iiint_D h_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4\pi \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 4\pi$$

e, uma vez que $|f| \leq h$ em D , temos $|\iiint_D f| \leq \iiint_D |f| \leq \iiint_D h = 4\pi$. Logo, o integral $|\iiint_D f|$ é majorado por 4π .