Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

PARA OS CURSOS LEAN, LEC, LEGMIN, LEIC, LEM, LEMAT, LET

TESTE 2
20 DE DEZEMBRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere o seguinte conjunto

$$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2 - x^2 - y^2 \ ; \ z - y = 0\big\}\,.$$

(2.5 val.) (a) Mostre que C é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(4 val.) (b) Determine, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto (ou os pontos) de C que está a maior distância da origem. Diga, justificando, se esse ponto tem de existir.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \ ; \ 0 < y < 2\big\}$$

e o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (yx, -y^2, zy).$$

Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal que no ponto $(2,1,2)$ tem a terceira componente negativa, usando:

(4 val.) (a) a definição de fluxo;

(3 val.) (b) o teorema da divergência;

(3.5 val.) (c) o teorema de Stokes.

(3 val.) (3) Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{|x| y \ \operatorname{sen}(x+y) \ e^{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}.$$

Mostre que f é integrável em D e indique, justificando, um majorante para $|\int_D f|$.