Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEC, LET, LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 8 DE NOVEMBRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \,,\; 0 \leq y \leq 1 \,,\; 0 \leq z \leq y^2 + 1\} \,.$$

(3 val.) (a) Calcule o integral $\iiint_S x^2 y$.

(3 val.) (b) Dada uma função integrável, f, em S escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz \,.$$

(3 val.) (2) Calcule o volume do sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \;;\; z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \;;\; y \geq 0\}.$$

(3 val.) (3) Um fio dado por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = \frac{x^2}{2} \,;\; |x| < 1\}$$

tem densidade de massa $\sigma = \sqrt{1 + x^2}$. Determine a massa M e a coordenada y_{CM} do centro de massa. Diga, justificando mas sem fazer cálculos, qual o valor de x_{CM}.

vire s.f.f.

(4) Considere o seguinte campo de forças definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$:

$$F(x,y,z) = \left(x(x^2+y^2+z^2) \ , \ -\frac{z}{y^2+z^2} + y(x^2+y^2+z^2) \ , \ \frac{y}{y^2+z^2} + z(x^2+y^2+z^2) \right) .$$

(1.5 val.) (a) Mostre que F é um campo fechado.

(1.5 val.) (b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida por $x = 0$ e $y^2 + z^2 = 1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$. Será F um gradiente no seu domínio? Justifique.

(2 val.) (c) Calcule o trabalho de F ao longo do triângulo com vértices $(0, -3, 0)$, $(0, 3, 3)$ e $(0, 3, -3)$ percorrido no sentido **horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$.

(3 val.) (5) Seja F um campo fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostre que existe um real k tal que o campo vectorial

$$F - kG,$$

é um campo gradiente, onde G é o campo vectorial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dado por

$$G = \frac{1}{x^2+y^2}(y, -x).$$