

ANÁLISE MATEMÁTICA III

PARA OS CURSOS LEAN, LEC, LEGMIN, LEIC, LEM, LEMAT, LET

TESTE 2

20 DE DEZEMBRO DE 2003

(1) Considere o seguinte conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2 ; z - y = 0\}.$$

- (a) Mostre que C é uma variedade. Qual a sua dimensão?
- (b) Determine, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto (ou os pontos) de C que está a maior distância da origem. Diga, justificando, se esse ponto tem de existir.

Resolução de (1):

- (a) O conjunto C está dado como conjunto de nível zero da seguinte função de classe C^1 (de facto C^∞)

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ F(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z - 2, z - y). \end{aligned}$$

A (matriz) derivada de F

$$DF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tem característica $k = 2$, excepto nos pontos de $\mathbb{R}^3$ da recta definida por $x = 0$ e $y = -1/2$. Esta recta não intersecta C (de facto substituindo $x = 0$ e $y = -1/2$ nas duas equações que definem C obtemos um sistema impossível para z) pelo que C é uma variedade de dimensão $m = 3 - k = 1$.

- (b) O conjunto C é fechado porque é o conjunto de nível de uma função contínua. Por outro lado as coordenadas x e y dos pontos da curva satisfazem a equação

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

pelo que satisfazem também as seguintes desigualdades óbvias,

$$|x| \leq \frac{3}{2} ; |z| = |y| \leq 2,$$

que mostram que C é limitado. Assim, a variedade C é compacta pelo que qualquer função contínua tem em C (pelo menos) um mínimo e um máximo (diferentes caso a função não seja constante). Interessa-nos a restrição a C da função contínua f , correspondente ao quadrado da distância à origem, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (esta função tem os mesmos extremos condicionados que a função distância e é significativamente mais simples).

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, consideramos a função escalar g em $\mathbb{R}^5$ dada por

$$g(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z - 2) + \mu(z - y).$$

As equações para os pontos de estacionaridade (condições necessárias de extremos) desta função são

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z - 2 = 0 \\ z = y \\ 2x + 2x\lambda = 0 \Leftrightarrow 2x(1 + \lambda) = 0 \\ 2y + 2y\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow 2y(1 + \lambda) - \mu = 0 \\ 2z + \lambda + \mu = 0. \end{cases}$$

Temos que $x = 0$ ou $\lambda = -1$.

Se $x = 0$ obtemos, das equações que definem C , o sistema

$$\begin{cases} z + y^2 - 2 = 0 \\ z = y \end{cases}$$

e portanto

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -2$$

ou seja obtemos os dois pontos de C , $P_1 = (0, 1, 1)$ e $P_2 = (0, -2, -2)$.

Se $\lambda = -1$ então $\mu = 0$, $z = y = 1/2$ e $x = \pm\sqrt{5}/2$. Obtemos os dois pontos $P_3 = (\sqrt{5}/2, 1/2, 1/2)$ e $P_4 = (-\sqrt{5}/2, 1/2, 1/2)$.

Os valores de f nos quatro pontos são $f(P_1) = 2$, $f(P_2) = 8$ e $f(P_3) = f(P_4) = 7/4$ pelo que o ponto de C a maior distância da origem é $P_2 = (0, -2, -2)$. A distância deste ponto à origem é $d = \sqrt{f(P_2)} = 2\sqrt{2}$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 ; 0 < y < 2\}$$

e o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (yx, -y^2, zy).$$

Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal que no ponto $(2, 1, 2)$ tem a terceira componente negativa, usando:

- (a) a definição de fluxo;
- (b) o teorema da divergência;
- (c) o teorema de Stokes.

Resolução de (2):

- (a) M é uma superfície esférica de raio 3 centrada na origem, cortada por dois planos verticais dados pelas equações $y = 0$ e $y = 2$.

Consideremos uma parametrização de M definida por:

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \sqrt{9 - \rho^2}, \rho \sin \theta), \quad \rho \in]\sqrt{5}, 3[, \quad \theta \in]0, 2\pi[.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ -\frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D_\rho g \times D_\theta g &= \left(\cos \theta, -\frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}, \sin \theta \right) \times (-\rho \sin \theta, 0, \rho \cos \theta) \\ &= \left(-\frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}} \cos \theta, -\rho, -\frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

tem o sentido da normal pretendida, com a terceira componente negativa no ponto $(2, 1, 2) = g(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Ainda,

$$\begin{aligned} F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) &= -\rho^3 \cos^2 \theta + \rho(9 - \rho^2) - \rho^3 \sin^2 \theta \\ &= \rho(9 - \rho^2) - \rho^3. \end{aligned}$$

Obtemos pois que o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^3 F(g(\rho, \theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^3 \rho(9 - \rho^2) - \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^3 9\rho - 2\rho^3 d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right]_{\sqrt{5}}^3 = -20\pi. \end{aligned}$$

- (b) Temos $\text{div } F = y - 2y + y = 0$. Seja T_1 o disco no plano $y = 0$ de raio 3 e centrado na origem. Seja T_2 o disco no plano $y = 2$ de raio $\sqrt{5}$ e centrado no ponto $(0, 2, 0)$. Sejam n_1, n_2, n as normais unitárias a T_1, T_2 e M , respectivamente, exteriores ao volume D limitado por T_1, T_2 e M . Pelo Teorema da Divergência temos,

$$0 = \iiint_D \text{div } F = \iint_M F \cdot n + \iint_{T_1} F \cdot n_1 + \iint_{T_2} F \cdot n_2.$$

Como:

$$- n_1 = (0, -1, 0) \text{ e } F \cdot n_1 = y^2 = 0 \text{ em } T_1. \text{ Logo:}$$

$$\iint_{T_1} F \cdot n_1 = 0;$$

$$- n_2 = (0, 1, 0) \text{ e } F \cdot n_2 = -y^2 = -4 \text{ em } T_2. \text{ Logo:}$$

$$\iint_{T_2} F \cdot n_2 = -4(\text{área } T_2) = -20\pi;$$

Assim, obtemos

$$\iint_M F \cdot n = - \iint_{T_1} F \cdot n_1 - \iint_{T_2} F \cdot n_2 = 20\pi.$$

Note-se que este fluxo é segundo a normal exterior à fronteira de D . No entanto, o fluxo pedido é segundo a normal interior, logo o resultado deverá ser -20π , como o obtido na alínea (a).

- (c) Sabemos que $\operatorname{div} F = 0$ e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$ logo existe um potencial vector H tal que $\operatorname{rot} H = F$. Para o determinar resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} = F_1 = yx \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = F_2 = -y^2 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = F_3 = yz. \end{cases}$$

Escolhendo $H_1 = 0$, obtemos da segunda e terceira equações $H_3 = xy^2 + \alpha(y, z)$, $H_2 = xyz + \beta(y, z)$. A primeira equação fica então $2xy + \frac{\partial \alpha}{\partial y} - xy - \frac{\partial \beta}{\partial z} = yx$ e pode ser resolvida tomando por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = 0$. O potencial vector vai então ser $H(x, y, z) = (0, xyz, xy^2)$. Usando o Teorema de Stokes temos

$$\iint_M F \cdot n \, dS = \int_M \operatorname{rot} H \cdot n \, dS = \int_{\partial M} H \cdot dg,$$

onde g é uma parametrização da fronteira de M , percorrida no sentido compatível com a orientação de M dada pela normal n . Temos $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ onde

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9; y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 5; y = 2\},$$

e, usando a regra da mão direita, concluímos que Γ_1 deve ser percorrida no sentido directo e Γ_2 no sentido horário, quando observadas por exemplo do ponto $(0, -10, 0)$. Assim, uma parametrização para Γ_1 é dada por

$$g_1(t) = (3 \cos t, 0, 3 \sin t) \quad 0 < t < 2\pi$$

e para Γ_2 é dada por

$$g_2(t) = (\sqrt{5} \cos t, 2, -\sqrt{5} \sin t) \quad 0 < t < 2\pi.$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \iint_M F \cdot n \, dS &= \iint_{\partial M} H \cdot dg \\ &= \int_0^{2\pi} H(g_1(t)) \cdot g'_1(t) \, dt + \int_0^{2\pi} H(g_2(t)) \cdot g'_2(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot g'_1(t) \, dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, -10 \cos t \sin t, 4\sqrt{5} \cos t) \cdot (-\sqrt{5} \sin t, 0, -\sqrt{5} \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -20 \cos^2 t \, dt = -20 \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = -20\pi. \end{aligned}$$

(3) Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Considere a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{|x|y \operatorname{sen}(x + y) e^{1-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que f é integrável em D e indique, justificando, um majorante para $|\int_D f|$.

Resolução de (3):

A função f é contínua em $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e

$$|f| \leq \frac{|x|y e^{1-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}$$

pelo que, se mostrarmos que a função $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = \frac{|x|y e^{1-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}$ é integrável, podemos concluir, pelo critério de comparação, que f é integrável em D .

Para mostrar que h é integrável vamos utilizar o Teorema da convergência monótona. Para tal, consideramos a sucessão de funções $\{h_k\}$ definidas por

$$h_k = \begin{cases} \frac{|x|y e^{1-x^2-y^2}}{x^2 + y^2} & \text{se } \frac{1}{k} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq k \\ 0 & \text{c.c.,} \end{cases}$$

que são contínuas num compacto e zero fora dele pelo que são integráveis em $\mathbb{R}^2$ e consequentemente em D . Além disso, esta sucessão é monótona crescente (pois $h_k \geq 0$) e a sucessão dos integrais de h_k é limitada:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_D h_k &= \int_0^\pi \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{r^3 |\cos \theta| \sin \theta e^{1-r^2}}{r^2} dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r e^{1-r^2} \left(\int_0^\pi |\cos \theta| \sin \theta d\theta \right) dr \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r e^{1-r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \right) dr \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r e^{1-r^2} \left(\left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) dr = \int_{\frac{1}{k}}^k r e^{1-r^2} dr \\ &= \left[-\frac{e^{1-r^2}}{2} \right]_{\frac{1}{k}}^k = \frac{1}{2} \left(e^{1-\frac{1}{k^2}} - e^{1-k^2} \right) \leq \frac{e}{2}; \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$ é integrável em D e consequentemente f também. Além disso,

$$\int_D h = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D h_k.$$

Para encontrar um majorante de $|\int_D f|$, temos

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f| \leq \int_D h = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D h_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(e^{1-\frac{1}{k^2}} - e^{1-k^2} \right) = \frac{e}{2}.$$