

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEC, LET, LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 8 DE NOVEMBRO DE 2003

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y^2 + 1\}.$$

(a) Calcule o integral $\iiint_S x^2 y$.

[Resolução]

Da definição de S vemos que

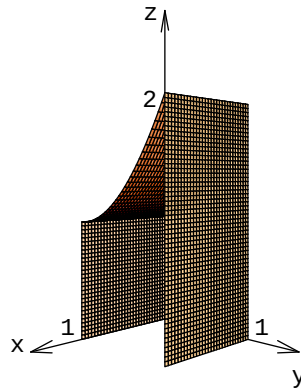
$$\begin{aligned} \iiint_S x^2 y &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{y^2+1} x^2 y \, dz dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y [z]_{z=0}^{z=y^2+1} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y (y^2 + 1) dx dy = \\ &= \int_0^1 (y^3 + y) \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (y^3 + y) dy = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) Dada uma função integrável, f , em S escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz.$$

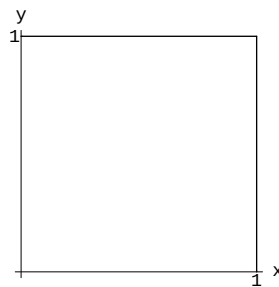
[Resolução]

Da figura



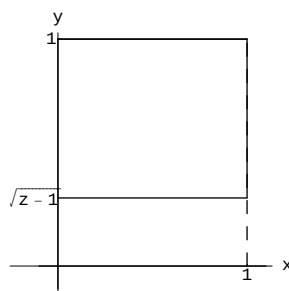
vemos que z toma o seu valor máximo quando y é máximo, pelo que os limites de variação de z são, $0 \leq z \leq 2$. Da figura e da condição $y^2 \geq z - 1$, vemos que ha' dois tipos de cortes com planos perpendiculares ao eixo Oz .

$0 \leq z \leq 1$: Neste caso o corte com um plano $z = \text{const}$ (a sua projecção no plano Oxy) não depende do valor de z neste intervalo e é dado pelo quadrado



$$B_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}.$$

$1 \leq z \leq 2$: Agora o corte já depende do valor de z e é dado por



$$B_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{z-1} \leq y \leq 1\}.$$

Concluimos então que, na ordem de integração pedida,

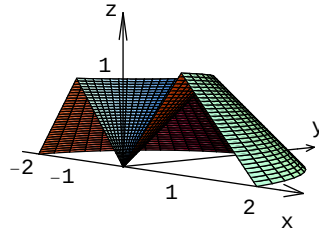
$$\iiint_S f = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f \, dx dy dz + \int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^1 \int_0^1 f \, dx dy dz.$$

(2) Calcule o volume do sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}; z \leq \sqrt{x^2 + y^2}; y \geq 0\}.$$

[Resolução]

O sólido B



tem simetria de rotação em torno do eixo z pelo que é conveniente usar coordenadas cilíndricas

$$g : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}.$$

O módulo do Jacobiano é $|\det(Dg)| = \rho$ e a imagem inversa de $\tilde{B} = B \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ é

$$g^{-1}(\tilde{B}) = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \rho; z \leq \rho; 0 < \theta \leq \pi; \rho > 0\}.$$

O valor máximo de z corresponde à intersecção de $z = \rho$ com $z = 2 - \rho$ pelo que, $z_{max} = 1$. Temos então,

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \int_B 1 = \int_{g^{-1}(\tilde{B})} \rho = \int_0^\pi \int_0^1 \int_z^{2-z} \rho \, d\rho dz d\theta = \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{2} [\rho^2]_{\rho=z}^{\rho=2-z} dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (4 - 4z + z^2 - z^2) dz = \\ &= \frac{\pi}{2} [4z - 2z^2]_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Alternativamente: Integrando primeiro em ordem a z e depois em ordem a ρ , $0 < \rho \leq 2$, temos de dividir $g^{-1}(\tilde{B})$ em duas regiões

$$\begin{aligned} 0 < \rho \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq z \leq \rho \\ 1 < \rho \leq 2 &\Rightarrow 0 \leq z \leq 2 - \rho, \end{aligned}$$

e portanto, nesta ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
 Vol(B) &= \int_B 1 = \int_{g^{-1}(\tilde{B})} \rho = \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^\rho \rho \, dz d\rho d\theta + \int_0^\pi \int_1^2 \int_0^{2-\rho} \rho \, dz d\rho d\theta = \\
 &= \pi \int_0^1 \rho [z]_{z=0}^{z=\rho} d\rho + \pi \int_1^2 \rho [z]_{z=0}^{z=2-\rho} d\rho = \\
 &= \pi \int_0^1 \rho^2 d\rho + \pi \int_1^2 (2\rho - \rho^2) d\rho = \pi \left(\left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 + \left[\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 \right) = \\
 &= \pi \left(\frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \pi.
 \end{aligned}$$

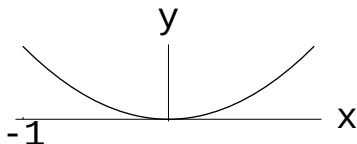
(3) Um fio dado por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{2}; |x| < 1\}$$

tem densidade de massa $\sigma = \sqrt{1+x^2}$. Determine a massa M e a coordenada y_{CM} do centro de massa. Diga, justificando mas sem fazer cálculos, qual o valor de x_{CM} .

[Resolução]

- Um parâmetro natural para o fio C



é a coordenada x dos seus pontos,

$$g(x) = (x, \frac{x^2}{2}) ; |x| \leq 1.$$

O vector velocidade em ordem ao parâmetro é $g'(x) = (1, x)$ e a sua norma, $\|g'(x)\| = \sqrt{1+x^2}$. Como $\sigma(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$, a massa da linha é

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \sigma = \int_{-1}^1 \sigma(g(x)) \|g'(x)\| dx \\
 &= \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

- Para a coordenada y_{CM} do centro de massa de C temos

$$\begin{aligned}
 y_{CM} &= \frac{1}{M} \int_C y \sigma = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 y(x) \sigma(g(x)) \|g'(x)\| dx = \\
 &= \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} (1+x^2) dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

- A coordenada x_{CM} do centro de massa de C é $x_{CM} = 0$ uma vez que tanto a linha C , como a densidade de massa σ são invariantes em relação a $x \mapsto -x$.

(4) Considere o seguinte campo de forças definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$:

$$F(x, y, z) = \left(x(x^2 + y^2 + z^2), -\frac{z}{y^2 + z^2} + y(x^2 + y^2 + z^2), \frac{y}{y^2 + z^2} + z(x^2 + y^2 + z^2) \right).$$

(a) Mostre que F é um campo fechado.

[Resolução]

Um campo de classe C^1 diz-se fechado se as derivadas parciais cruzadas são iguais

$$(1) \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Como as derivadas parciais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= 2xy = \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{y^2 + z^2 - 2y^2}{(y^2 + z^2)^2} + 2zy = \frac{-y^2 + z^2}{(y^2 + z^2)^2} + 2zy \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{-y^2 - z^2 + 2z^2}{(y^2 + z^2)^2} + 2yz = \frac{-y^2 + z^2}{(y^2 + z^2)^2} + 2yz \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 2xz = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{aligned}$$

verificam-se as três igualdades (1) pelo que o campo F é fechado no seu domínio.

(b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva definida por $x = 0$ e $y^2 + z^2 = 1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$. Será F um gradiente no seu domínio? Justifique.

[Resolução]

Seja C a circunferência definida por $x = 0$ e $y^2 + z^2 = 1$. O campo F é uma soma de dois campos

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ F_1(x, y, z) &= \left(0, -\frac{z}{y^2 + z^2}, \frac{y}{y^2 + z^2} \right) \\ F_2(x, y, z) &= (x(x^2 + y^2 + z^2), y(x^2 + y^2 + z^2), z(x^2 + y^2 + z^2)). \end{aligned}$$

Como o campo radial F_2 é fechado em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, F_2 é gradiente e portanto também $\oint_C F_2 = 0$. O caminho

$$g_C : \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

percorre C no sentido pedido pelo que temos

$$\begin{aligned}\oint_C F &= \oint_C F_1 + \oint_C F_2 = \oint_C F_1 = \int_0^{2\pi} F_1(g_C(t)) \cdot g'_C(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -\sin(t), \cos(t)) \cdot (0, -\sin(t), \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.\end{aligned}$$

F não é gradiente no seu domínio porque o integral de F ao longo do caminho fechado g_C é diferente de zero. A igualdade a zero do integral ao longo de qualquer caminho fechado é condição necessária e suficiente para que um campo vectorial seja gradiente.

- (c) Calcule o trabalho de F ao longo do triângulo com vértices $(0, -3, 0)$, $(0, 3, 3)$ e $(0, 3, -3)$ percorrido no sentido **horário** para um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$.

[Resolução]

Seja g_T um caminho que percorre o triângulo T com vértices $(0, -3, 0)$, $(0, 3, 3)$ e $(0, 3, -3)$ no sentido pedido. Este caminho é homotópico, no domínio de F , ao caminho $\tilde{g}_C$ que percorre a circunferência C da alínea anterior no sentido oposto a g_C . Logo, como F é fechado,

$$\oint_T F \cdot dg_T = - \oint_C F \cdot dg_C = -2\pi.$$

- (3 val.) (5) Seja F um campo fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostre que existe um real k tal que o campo vectorial

$$F - kG,$$

é um campo gradiente, onde G é o campo vectorial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dado por

$$G = \frac{1}{x^2 + y^2}(y, -x).$$

[Resolução]

O campo G também é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pelo que o campo $F - kG$ é fechado neste conjunto para todo o $k \in \mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qualquer caminho fechado g_Γ é homotópico a um caminho que dá um número inteiro, m , de voltas por uma circunferência C em torno da origem. Consideramos como positivo o sentido anti-horário pelo que $m < 0$ significa que o caminho dá $|m|$ voltas no sentido horário e então

$$\oint_\Gamma (F - kG) \cdot dg_\Gamma = m \oint_C (F - kG).$$

Em particular, $m = 0$ significa que o caminho g_Γ é homotópico a um ponto (caminho fechado trivial) e que portanto o integral $\oint_\Gamma (F - kG) \cdot dg_\Gamma$ é igual a zero.

Então, um campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é gradiente se e só o seu integral ao longo de C é igual a zero. Temos assim de encontrar k para o qual o campo

$$F - kG$$

é gradiente ou, equivalente, para o qual

$$\oint_C (F - kG) = 0.$$

Consideremos o caminho $g(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ que representa parametricamente a circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Temos

$$\oint_C G \cdot dg = \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (\sin(t), -\cos(t)) dt = -2\pi.$$

Seja $r = \oint_C F \cdot dg$. Então, escolhendo

$$k = -\frac{r}{2\pi},$$

obtemos

$$\oint_C \left(F + \frac{r}{2\pi} G \right) \cdot dg = r + \frac{r}{2\pi} \oint_C G \cdot dg = r - r = 0$$

pelo que o campo

$$F + \frac{r}{2\pi} G$$

é gradiente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.