

Análise Matemática III

Exercícios

Teorema de Fubini

1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\int \int_Q \sqrt{y} + x - 3xy^2 dx dy$, com $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

b) $\int \int_Q \sin^2 x \sin^2 y dx dy$, com $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$

c) $\int \int_Q \sin(x + y) dx dy$, com $Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

d) $\int \int_Q |\cos(x + y)| dx dy$, com $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$

e) $\int \int_Q \frac{e^{\frac{2x}{y}}}{y^3} dx dy$, com $Q = [0, 2] \times [1, 2]$

f) $\int \int \int_Q xy^2 z^3 dx dy dz$, com $Q = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$

2 Calcule o volume da região debaixo do gráfico da função definida no intervalo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{se } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3 Esboce o conjunto S definido pelos limites de integração do integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{\arcsen y} y \sin x dx dy$$

Obtenha os limites de integração na ordem inversa e calcule o integral.

4 Esboce a região de integração e calcule o integral.

a) $\int \int_S x \cos(x + y) dx dy$ onde S é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ e (π, π) .

b) $\int \int_S e^{x+y} dx dy$ onde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

5 Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração dos seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy$

b) $\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx$

c) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx$

d) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x, y) dy dx$

e) $\int_1^e \int_0^{\log x} f(x, y) dy dx$

f) $\int_0^\pi \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy dx$

g) $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} f(x, y) dy dx$

h) $\int_{-1}^1 \int_{x^2-2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$

i) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{2y^2-1} f(x, y) dx dy$

j) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz dy dx$

k) $\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \int_0^{x^2} f(x, y, z) dz dy dx$

l) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz dy dx$

m) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2-y^2}^1 f(x, y, z) dz dy dx$

6 Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y + x - 1 \leq 0, y \leq x\}$. Escreva uma expressão para área de S em termos de integrais iterados nas duas ordens de integração possíveis.

7 Esboce a região de integração e calcule cada um dos seguintes integrais.

- a) $\int \int \int_S xy^2 z^3 dx dy dz$ onde S é o sólido limitado pelos três planos coordenados, pela superfície $z = xy$ e pelo plano $x + y = 1$.
- b) $\int \int \int_S \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$ onde S é a região limitada pelos três planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.
- c) $\int \int \int_S \sqrt{1+y} dx dy dz$ onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$.

8 Escreva o volume de S sob a forma de integrais simples sucessivos nas ordens de integração x, y, z e z, y, x e calcule o volume de S .

- a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$
- b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$

9 Esboce o sólido S e calcule o seu volume por meio de um integral iterado.

- a) S é a pirâmide em $\mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + 3y + 5z = 1$.
- b) S é o sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.

10 Considere a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Verifique o teorema de Fubini neste caso particular da seguinte forma:

- a) Mostre que f é integrável e calcule, usando as propriedades dos integrais múltiplos, o valor de $\int_{[0,1] \times [0,1]} f$
- b) Calcule os integrais iterados $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ e $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$

11 Calcule o centróide da região $S \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

- a) $y = x^2$, $x + y = 2$
- b) $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$
- c) $y = \log x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$
- d) $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$
- e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ e contida no primeiro quadrante.

12 Determine a massa e o centro de massa de uma placa fina limitada em $\mathbb{R}^2$ pelo arco de parábola $y = 2x - x^2$ e pelo segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sabendo que a densidade de massa em cada ponto (x, y) é $\frac{1-y}{1+x}$.

13 Calcule os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados para cada uma das placas finas limitadas em $\mathbb{R}^2$ pelas curvas dadas e com densidade de massa constante igual a 1.

- a) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ com $y \leq a$, e $x = y$, $y = a$
- b) $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$ no primeiro quadrante.

14 Prove a “lei dos eixos paralelos”: Se S é uma placa fina de massa m e L_0 e L são dois eixos paralelos, no plano de S tal que L_0 passa pelo centro de massa de S . Então os momentos de inércia de S em relação aos dois eixos estão relacionados pela fórmula:

$$I_L = I_{L_0} + mh^2$$

onde h designa a distância entre os dois eixos.

15 Determine a distância média de um canto de um quadrado de lado h aos pontos do interior do quadrado.

16 Mostre que

$$\int_0^x \int_0^v \int_0^u f(t) dt du dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$