Análise Matemática III
1^{o} semestre de 2006/2007

1. Considere o conjunto:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3 = 0;\ y > 0;\ 1 < z < 3\},$$

   a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão. (2.5 val.)

   b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(0, 2, 2)$. (3 val.)

   c) Justifique porque a equação $x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3 = 0$ determina z implicitamente como função de classe C^1 de x e y numa vizinhança do ponto $(0, 2, 2)$, e calcule a derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 2)$. (2.5 val.)

Resolução

(a) M é o conjunto de nível 0 da função $F(x, y, z) = x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3$, de classe C^1. A matriz derivada de F é dada por:

$$DF(x, y, z) = [2(x - z),\ 4y,\ -2x - 3z^2)].$$

Temos:

$$DF(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in M$$

porque $4y > 0$, $\forall (x, y, z) \in M$, ou porque $DF(x, y, z) = (0, 0, 0)$ implica $(x = z) \wedge (y = 0) \wedge (-2x - 3z^2 = 0)$, ou seja $(z = 0) \vee (z = -2/3)$, portanto $(x, y, z) \notin M$. Conclui-se que M é uma variedade, e que a sua dimensão é $3 - \text{car}DF = 3 - 1 = 2$.

(b) Os vectores normais a M no ponto $(0, 2, 2)$ são gerados por $DF(0, 2, 2) = (-4, 8, -12)$. Portanto o espaço normal a M é dado por:

$$T_{(0,2,2)}M^{\perp} = \{c(-1, 2, -3) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Os vectores tangentes a M no ponto $(0, 2, 2)$ são perpendiculares ao vector $(-1, 2, -3)$, portanto são soluções da equação $-a + 2b - 3c = 0$. Assim

$$T_{(0,2,2)}M = \{(b(2, 1, 0) + c(-3, 0, 1) : b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(c) A função $F(x, y, z) = x^2 - 2xz + 2y^2 - z^3$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, e verifica $F(0, 2, 2) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 2) = -12 \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança de $(0, 2, 2)$, onde a equação

$F(x,y,z)=0$ determina z implicitamente como função de classe C^1 de x e y. Temos ainda:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = -\left.\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}\right|_{(0,2,2)} = -\frac{8}{-12} = 2/3.$$

2. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z+1)$ e a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=1, \ x,y,z>0\right\}.$$

Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal com terceira componente negativa.

(a) pela definição de fluxo; (3 val.)

(b) usando o teorema da divergência; (3 val.)

Resolução

(a) Consideremos a parametrização de S definida por:

$$g(x,y) = (x,y,1-x-y),$$

com

$$(x,y) \in T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0<y<1-x, \ 0<x<1\}.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$D_x g \times D_y g = (1,1,1)$$

tem o sentido contrário ao pretendido, pois a sua terceira componente é positiva. Assim,

$$F(g(x,y)) \cdot (D_x g \times D_y g) = (x,y,2-x-y) \cdot (1,1,1) = 2$$

pelo que o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu \, dS = &= -\iint_T F(g(x,y)) \cdot (1,1,1) \, dx \, dy \\ &= -\iint_T 2 \, dx \, dy = -2 \, \text{área}(T) = -2 \times \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Alternativamente, vemos facilmente pela equação do plano $x+y+z=1$ que a normal unitária do enunciado é $\nu = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_S F\cdot\nu\, dS = &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int_S (x,y,z+1)\cdot(1,1,1)\, dS \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int_S x+y+z+1\, dS = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int_S 2\, dS \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int_S 1\, dS = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_T ||D_x g\times D_y||\, dx\, dy \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}\times \text{área}(T) = -1.
\end{aligned}$$

(b) Temos $\text{div}F = 1+1+1 = 3$. Seja D a região

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<1-x-y,\ x,y>0\}$$

e B_1, B_2 e B_3 as regiões

$$\begin{aligned}
B_1 : &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0,\ 0\le y\le 1-x\},\\
B_2 : &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0,\ 0\le z\le 1-y\},\\
B_3 : &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0,\ 0\le z\le 1-x\}.
\end{aligned}$$

Sejam $n_{B_1}=(0,0,-1)$, $n_{B_2}=(-1,0,0)$, $n_{B_3}=(0,-1,0)$ as normais unitárias a B_1, B_2 e B_3, respectivamente, exteriores ao sólido D (note que $\partial D = S\cup B_1\cup B_2\cup B_3$). Pelo Teorema da Divergência temos,

$$\iiint_D \text{div}F = \int_S F\cdot n_{\text{ext}} + \int_{B_1} F\cdot n_{B_1} + \int_{B_2} F\cdot n_{B_2} + \int_{B_3} F\cdot n_{B_3}.$$

Como

*

$$\begin{aligned}
\iiint_D \text{div}F &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 3\, dz\, dy\, dx \\
&= 3\int_0^1\int_0^{1-x} 1-x-y\, dy\, dx = \\
&= 3\int_0^1 [(1-x)y-\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=1-x}\, dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx = -\frac{1}{2}[(1-x)^3]_0^1 = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

* $n_{B_1}=(0,0,-1)$ e $F\cdot n_{B_1} = -(z+1) = -1$ em B_1, pelo que

$$\int_{B_1} F\cdot n_{B_1} = -(\text{área } B_1) = -\frac{1}{2},$$

* $n_{B_2}=(-1,0,0)$ e $F\cdot n_{B_2} = -x = 0$ em B_2, pelo que

$$\int_{B_2} F\cdot n_{B_2} = 0,$$

* $n_{B_3} = (0,-1,0)$ e $F \cdot n_{B_3} = -y = 0$ em B_3, pelo que

$$\int_{B_3} F \cdot n_{B_3} = 0,$$

obtemos

$$\int_S F \cdot n_{\text{est}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Note-se que este fluxo é segundo a normal exterior a D e que o fluxo pedido é segundo a normal interior, pelo que o resultado deverá ser -1, como o obtido na alínea (a).

3. Utilizando o teorema de Stokes calcule o fluxo do campo

$$H(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

através da superfície

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2+y^2, \ y > 0, \ z < 4\right\},$$

no sentido da normal com terceira componente positiva. (3 val.)

Resolução

O campo H é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e tem divergência nula

$$\text{div}H = 0+0+0 = 0.$$

Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela concluímos que H é um campo rotacional, i.e., tem um potencial vector, A,

$$\begin{aligned} \text{rot}A &= H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \quad \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = H_1 = y+z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = H_2 = x+z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = H_3 = x+y \end{cases} \end{aligned}$$

Escolhendo $A_1 = 0$,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y+z \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = x+z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y+z \\ A_3 = -\frac{x^2}{2} - zx + c_3(y,z) \\ A_2 = \frac{x^2}{2} + xy + c_2(y,z). \end{cases} . \end{aligned}$$

Substituindo A_2 e A_3 na primeira equação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2}{2} - zx + c_3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2} + yx + c_2\right) &= y+z \Leftrightarrow \\ \frac{\partial c_3}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial z} &= y+z. \end{aligned}$$

Escolhendo $c_3 = 0$ obtemos

$$c_2 = -yz - \frac{z^2}{2} + k,$$

pelo que um potencial vector de H é dado por

$$A = \left(0, \frac{x^2}{2} + yx - yz - \frac{z^2}{2}, -\frac{x^2}{2} - zx\right).$$

Pelo teorema de Stokes temos então

$$\iint_L H \cdot n_L \; dS = \iint_L \text{rot } A \cdot n_L \; dS = \int_C A \cdot dg,$$

onde $C = \partial L = C_1 \cup C_2$, C_1 é um arco de uma parábola no plano xOz

$$C_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; y = 0, z = x^2, z < 4\right\},$$

e C_2 é uma semi-circunferência,

$$C_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = 4, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\right\}.$$

Usando x como parâmetro na curva C_1,

$$g_1(x) = (x, 0, x^2), \; -2 < x < 2,$$

e tendo em conta que o sentido induzido por n_L em C é o sentido horário para um observador no ponto $(0, 50, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} A \cdot dg_1 &= \int_{-2}^{2} \left(0, \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}, -\frac{x^2}{2} - x^3\right) \cdot (1, 0, 2x) \; dx = \\ &= -\int_{-2}^{2} \left(x^3 + 2x^4\right) \; dx = -\frac{2}{5} \; x^5|_{-2}^{+2} = -\frac{128}{5}. \end{aligned}$$

Para C_2, usando a representação paramétrica,

$$g_2(\theta) = (2\cos(\theta), 2 \text{ sen}(\theta), 4), \; 0 \leq \theta \leq \pi,$$

temos

$$\begin{aligned} &\int_{C_2} A \cdot dg_2 = \\ &= \textstyle\int_0^\pi \left(0, 2\cos^2(\theta) + 4\cos(\theta) \text{ sen}(\theta) - 8 \text{ sen}(\theta) - 8, -2\cos^2(\theta) - 8\cos(\theta)\right) \cdot \\ &\qquad \cdot (-2 \text{ sen}(\theta), 2\cos(\theta), 0) \; d\theta = \\ = &\int_0^\pi \left(4\cos^3(\theta) + 8\cos^2(\theta) \text{ sen}(\theta) - 16 \text{ sen}(\theta)\cos(\theta) - 16\cos(\theta)\right) \; d\theta \\ = &\left[4 \text{ sen}(\theta) - \frac{4}{3} \text{ sen}^3(\theta) - \frac{8}{3}\cos^3(\theta) + 4\cos(2\theta) - 16 \text{ sen}(\theta)\right]_0^\pi = \\ = &\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\iint_L H \cdot n_L \; dS = \int_{C_1} A \cdot dg_1 + \int_{C_2} A \cdot dg_2 = -\frac{128}{5} + \frac{16}{3} = -\frac{304}{15}.$$

4. Seja S a superfície em $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = f_1(x, y);\ t = f_2(x, y);\ (x, y) \in T\},$$

onde f_1, f_2 são funções de classe C^1 em T, e T é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

a) Obtenha uma fórmula geral para a área de S (ou seja para $\int_S 1$, pressupondo que esse integral é finito) na forma de um integral duplo envolvendo as derivadas parciais de f_1 e f_2. (1.5 val.)

b) Calcule a área da superfície S dada por: (1.5 val.)

$$z = x + 2y, \quad t = -x + y, \quad 0 < x, y < 1.$$

Resolução

(a) A superfície S é parametrizada pela função:

$$g(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad (x, y) \in T,$$

cuja matriz derivada é:

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim uma expressão para o factor $\sqrt{\det(Dg^t Dg)}$ no integral:

$$\sqrt{\det(Dg^t(x, y) Dg(x, y))}$$
$$= \sqrt{\det \begin{bmatrix} 1 + (\frac{\partial f_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial x})^2 & \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} & 1 + (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial y})^2 \end{bmatrix}}.$$

Depois de alguma simplificação, obtemos:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}.$$

Assim uma fórmula geral para a área de S é:

$$\iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

(b) Aplicando a fórmula na alínea anterior, a área é dada por:

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{17}\, dx\, dy = \sqrt{17}.$$