



Cálculo Diferencial e Integral II
EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q
16 de Maio de 2007

6ª ficha de problemas

Nº _____ Nome _____ Curso _____

I. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcule o integral de superfície:

$$\iint_A \sqrt{1 + 4z} \, dS.$$

II. Considere o campo

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto F(x,y) = \left(\frac{x-2y}{x^2+y^2}, \frac{2x+y}{x^2+y^2} \right).$$

a) Calcule o integral de linha

$$\oint_L F \cdot dr$$

em que L é a linha representada pelo caminho $[0, 2\pi] \ni t \mapsto r(t) = (\cos t, \sin t)$.

b) Decida se o campo F é ou não fechado.

c) Decida se o campo F é ou não conservativo em:

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$.

- I. A é parte do gráfico de uma função $C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x, y) \mapsto z = h(x, y) = x^2 + y^2$. Sendo assim o elemento de volume bidimensional é dado por $\sqrt{1 + \|\nabla h(x, y)\|^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Daí que

$$\begin{aligned} \iint_A \sqrt{1 + 4z} \, dS &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 + 4x^2 + 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + 4r^2)r \, dr \right) d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{4} \right) = 3\pi. \end{aligned}$$

- II. a) Começamos por notar que $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e usando a definição de integral de linha

$$\oint_L F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\cos t - 2\sin t)(-\sin t) + (2\cos t + \sin t)\cos t \, dt = \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi.$$

- b) De facto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x - 2y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{-2(x^2 + y^2) - 2y(x - 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x + y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

pelo que o campo é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- c) Da alínea (a) sabemos que o integral de linha de F ao longo de um caminho fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é não nulo pelo que F não é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Como se trata de um campo fechado e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\}$ é um conjunto aberto simplesmente conexo, F é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\}$.



Cálculo Diferencial e Integral II
EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q
16 de Maio de 2007

6ª ficha de problemas

Nº _____ Nome _____ Curso _____

I. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcule o integral de superfície:

$$\iint_A z\sqrt{1+4z} dS.$$

II. Considere o campo

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto F(x,y) = \left(\frac{2x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2y}{x^2+y^2} \right).$$

a) Calcule o integral de linha

$$\oint_L F \cdot dr$$

em que L é a linha representada pelo caminho $[0, 2\pi] \ni t \mapsto r(t) = (\cos t, \sin t)$.

b) Decida se o campo F é ou não fechado.

c) Decida se o campo F é ou não conservativo em:

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$.



Cálculo Diferencial e Integral II
EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q
16 de Maio de 2007

6ª ficha de problemas

Nº _____ Nome _____ Curso _____

I. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcule o integral de superfície:

$$\iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4z} \, dS.$$

II. Considere o campo

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right).$$

a) Calcule o integral de linha

$$\oint_L F \cdot dr$$

em que L é a linha representada pelo caminho $[0, 2\pi] \ni t \mapsto r(t) = (\cos t, \sin t)$.

b) Decida se o campo F é ou não fechado.

c) Decida se o campo F é ou não conservativo em:

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$.