# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

## 5ª ficha de problemas

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x + y + xy, 1 + x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}\theta(0, 1)$.

II. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \ \wedge \ y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\} \ni (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy.$$

I. a) $\phi$ é uma função $C^\infty$ (cada uma das funções coordenadas é polinomial). Além disso a sua matriz jacobiana é

$$J_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+2x+4x^3 & -1-2y \end{bmatrix}$$

pelo que, em particular,

$$J_\phi(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz não singular (temos $\det J_\phi(0,0) = -2 \neq 0$). Daí que estão satisfeitas as condições de aplicabilidade do teorema da função inversa e podemos garantir que existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi$ é injectiva em $B_\epsilon(0,0)$ sendo a inversa da restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0,0)$ uma função de classe $C^\infty$ em particular diferenciável.

b) Temos $\phi(\theta(u,v)) = (u,v)$ para todo o $(u,v)$ no domínio de $\theta$ que é um aberto contendo $\phi(0,0) = (0,1)$ (por outras palavras, numa vizinhança de $(0,1)$).
Dai que

$$J_\phi(0,0)J_\theta(0,1) = I$$

em que $I$ designa a matriz identidade. Assim sendo

$$J_\theta(0,1) = J_\phi(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Para funções diferenciáveis temos que as derivadas dirigidas correspondem ao valor da derivada actuando sobre o vector em questão. Neste caso particular[1]:

$$D_{(1,1)}\theta(0,1) = D\theta(0,1)(1,1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1,0).$$

II. Para calcular

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy.$$

usando a mudança de variável indicada precisaremos do módulo do determinante da matriz jacobiana da transformação de coordenadas inversa daquela que está definida. Mais precisamente se no interior do primeiro quadrante tivermos definido

$$(u,v) = \psi(x,y) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$$

temos

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy = \iint_{\psi(A)} v\, |\det J_{\psi^{-1}}(u,v)|\, du\, dv.$$

[1]Com algum abuso de notação identificando matrizes e as aplicações lineares que representam, etc.

Como

$$J_\psi(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{bmatrix}$$

temos

$$|\det J_\psi(x,y)| = |-3| = 3$$

pelo que

$$|\det J_{\psi^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{3}.$$

Sendo assim

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\,dx\,dy = \iint_{\psi(A)} \frac{v}{3}\,du\,dv = \int_1^2 \left( \int_1^2 \frac{v}{3}\,du \right) dv = 2\,\frac{1}{3}\,\frac{2^2-1}{2} = 1.$$

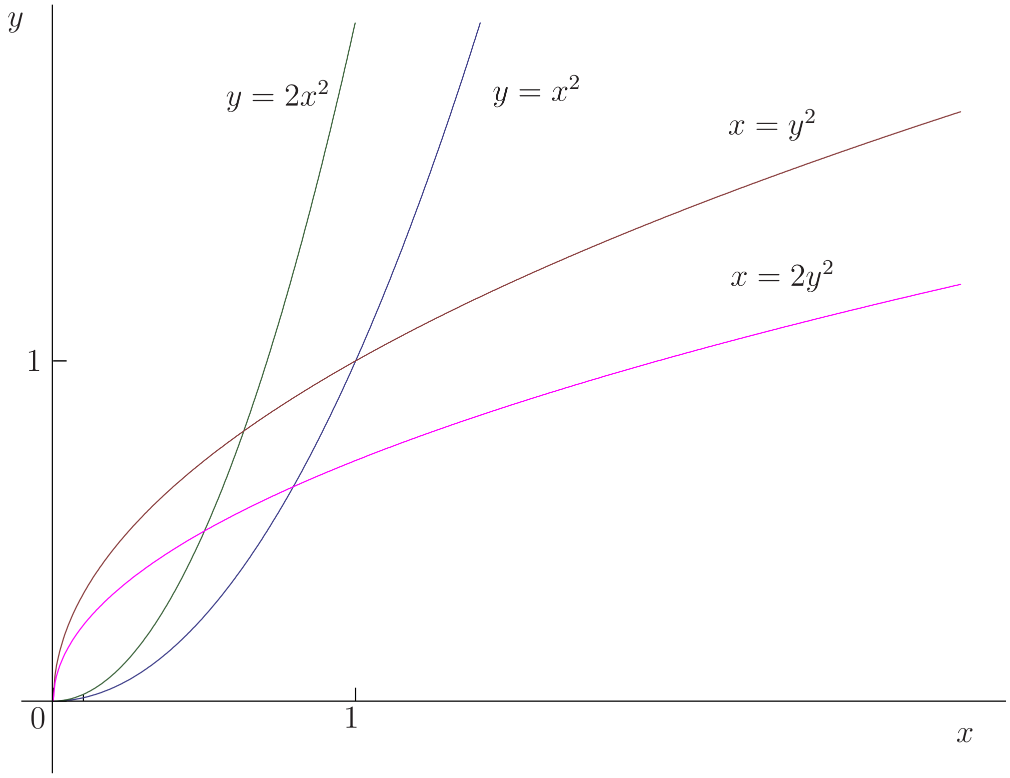


Figura 1: Esboço auxiliar da região de integração $A$.

# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

**5ª ficha de problemas**

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (1 + x + y + x^2 y, x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}\theta(1, 0)$.

II. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \ \wedge \ y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\} \ni (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x}{y^2}\, dx\, dy.$$

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

## 5ª ficha de problemas

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (1 + x + y + x^2 y, 1 + x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,-1)}\theta(1, 1)$.

II. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \;\wedge\; y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \;\wedge\; y > 0\} \ni (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x^2}{y}\, dx\, dy.$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

**5ª ficha de problemas**

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x + y + xy, 1 + x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}\theta(0, 1)$.

II. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \ \wedge \ y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\} \ni (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x^2}{y} \, dx \, dy.$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

## 5ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (1 + x + y + x^2 y, x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}\theta(1, 0)$.

II. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \ \wedge \ y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\} \ni (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x}{y^2} \, dx \, dy.$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EMater, EQ, MAC e Q

16 de Maio de 2007

**5ª ficha de problemas**

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (1 + x + y + x^2 y, 1 + x - y + x^2 - y^2 + x^4).$$

a) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que a restrição de $\phi$ a $B_\epsilon(0, 0)$ é injectiva.

b) Designe por $\theta$ a inversa da restrição cuja injectividade garantiu na alínea anterior. Calcule a derivada dirigida $D_{(1,-1)}\theta(1, 1)$.

II. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2 \ \wedge \ y^2 < x < 2y^2\}$. Use a mudança de variável $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > 0\} \ni (x, y) \mapsto (u, v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$ para calcular

$$\iint_A \frac{x^2}{y} \, dx \, dy.$$