Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = g \circ \phi(x, y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1, 2)$ sabendo que $\nabla g(2, -3) = (1, -1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = g \circ \phi(x, y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1, 2)$ sabendo que $\nabla g(-3, 2) = (1, -1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = g \circ \phi(x, y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1, 2)$ sabendo que $\nabla g(2, 5) = (1, -1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

I. a) A matriz jacobiana de ϕ, $J_\phi(x,y)$, é

$$J_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

b) Sendo tanto g como ϕ funções diferenciáveis em todo o espaço, ϕ devido a cada uma das suas coordenadas ser polinomial, podemos garantir que F é diferenciável e relacionar as derivadas de F, g e ϕ via o teorema de derivação da função composta. Assim

$$DF(x,y) = Dg(\phi(x,y))D\phi(x,y)$$

o que corresponde em termos de matrizes jacobianas, usando $(u,v) = (xy, x^2+y^2)$, a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_1 g(u,v) & D_2 g(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} yD_1g(u,v) + xD_2g(u,v) & 2xD_1g(u,v) + 2yD_2g(u,v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= yD_1g(xy, x^2+y^2) + xD_2g(xy, x^2+y^2), \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2xD_1g(xy, x^2+y^2) + 2yD_2g(xy, x^2+y^2). \end{aligned}$$

c) Como F é diferenciável

$$D_{(2,1)}F(1,2) = \nabla F(1,2) \cdot (2,1) = 2\frac{\partial F}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(1,2) &= 2D_1g(2,5) + D_2g(2,5), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,2) &= 2D_1g(2,5) + 4D_2g(2,5), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(1,2) &= 2 - 1 = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,2) &= 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

Assim

$$D_{(2,1)}F(1,2) = 2 - 2 = 0.$$

II. A função h é identicamente nula sobre os eixos coordenados o que implica que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Daí que para mostrar que h é diferenciável em $(0,0)$ basta mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Com efeito tal decorre da estimativa, válida para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left| \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{xy^2 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

em que se usou $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|\operatorname{sen} y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x,y) = (x^2 + y^2, xy)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = g \circ \phi(x,y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1,2)$ sabendo que $\nabla g(5,2) = (1,-1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ____________ Nome __________________________ Curso ____________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = g \circ \phi(x, y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1, 2)$ sabendo que $\nabla g(5, -3) = (1, -1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

4ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Define-se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = g \circ \phi(x, y)$.

a) Determine a matriz jacobiana de ϕ.

b) Exprima as derivas parciais de F em termos de derivadas parciais de g em pontos apropriados.

c) Calcule a derivada dirigida $D_{(2,1)}F(1, 2)$ sabendo que $\nabla g(-3, 5) = (1, -1)$.

II. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$.