Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{n + \operatorname{sen} n}{n^3 - 1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-n!}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{k\in\mathbb{N}, k\to+\infty} \operatorname{sen}^{2k}\left(\dfrac{\pi}{x+y}\right), & \text{se } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x+y = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.

I. São válidas as estimativas seguintes para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:

$$\left|\frac{n + \operatorname{sen} n}{n^3 - 1}\right| \leq \frac{n + |\operatorname{sen} n|}{n^3 - 1} \leq \frac{n+1}{n^3 - 1}. \tag{1}$$

Além disso

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^2}{(n+1)/(n^3-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-1}{n^3+n^2} = 1$$

pelo que da convergência da série $\sum \frac{1}{n^2}$ concluímos que $\sum \frac{n+1}{n^3-1}$ convergente. Assim de (1) concluímos que a série $\sum \frac{n+\operatorname{sen} n}{n^3-1}$ é absolutamente convergente.

Quanto à série $\sum 2^{-n!}$ notamos que $0 \leq 2^{-n!} \leq 2^{-n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum 2^{-n}$ é uma série geométrica de razão $1/2$ que é convergente pelo que $\sum 2^{-n!}$ é convergente.

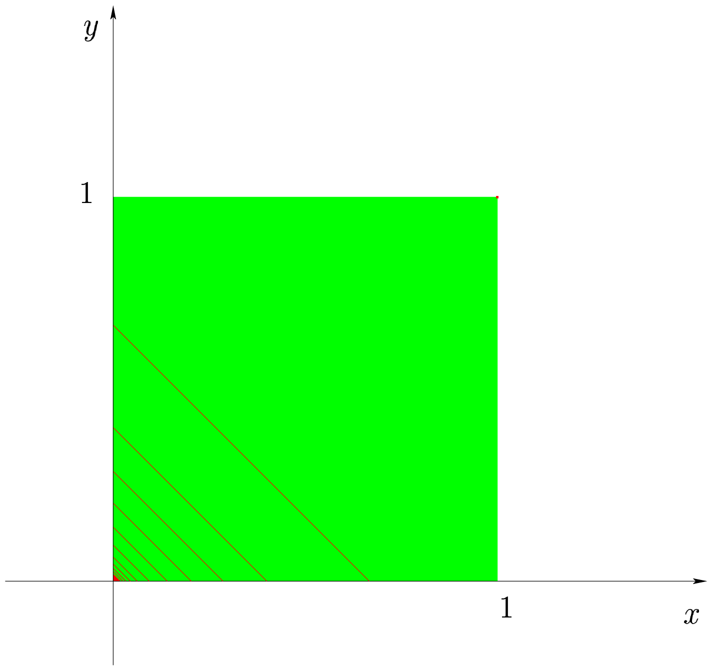

Figura 1: Conjunto dos pontos de descontinuidade de g.

II. a) Se $y \in [-1, 1]$ temos

$$\lim_{k\to+\infty} y^{2k} = \begin{cases} 0, & \text{se } |y| < 1, \\ 1, & \text{se } |y| = 1. \end{cases}$$

pelo que

$$\lim_{k\to+\infty} g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\operatorname{sen}(\pi/(x+y))| < 1 \text{ ou } (x,y) = (0,0), \\ 1, & \text{se } |\operatorname{sen}(\pi/(x+y))| = 1. \end{cases}$$

Ora $|\operatorname{sen}(\pi/(x+y))| = 1 \Leftrightarrow \pi/(x+y) = \pi/2 + k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou ainda, $x+y = \frac{2}{2k+1}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. As rectas $x+y = \frac{2}{2k+1}$ só intersectam $[0,1]\times[0,1]$ se $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$\lim_{k\to+\infty} g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x+y \neq \frac{2}{2k+1} \forall k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b) Usando o critério de continuidade de Heine verificamos facilmente que g é descontínua em todos os segmentos de recta correspondentes à intersecção de uma recta da forma $x + y = \frac{2}{2k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ com $[0,1]\times[0,1]$ e na origem (que é um ponto fronteiro ao conjunto formado pela união de todos esses segmentos) e contínua nos restantes pontos de $[0,1]\times[0,1]$.

c) Os conjuntos da forma $\{(0,0)\}$, ou $\{(1,1)\}$, ou $\{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x + y = \frac{2}{2k+1}\}$ (com $k \in \mathbb{N}$) têm medida nula (conjuntos formados por um ponto trivialmente, segmentos de recta devido a serem gráficos de funções contínuas definidas num intervalo de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$). Como o conjunto de todos os pontos de descontinuidade é uma união numerável de tais conjunto também terá medida nula. Portanto g é integrável em $[0,1]\times[0,1]$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{\sqrt{n} + \operatorname{sen} n}{n^2 - 1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-n^2}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{k\in\mathbb{N}, k\to+\infty} \cos^{2k}\left(\frac{\pi}{x+y}\right), & \text{se } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x+y = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{n \operatorname{sen} n}{n^3 - 1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-\cos n}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{k \in \mathbb{N}, k \to +\infty} \operatorname{sen}^{2k}\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right), & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{n + \operatorname{arctg} n}{n^3 - 1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-\operatorname{arctg} n}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{k \in \mathbb{N}, k \to +\infty} \operatorname{sen}^{2k}\left(\dfrac{\pi}{x+y}\right), & \text{se } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x+y = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ____________ Nome ________________________ Curso ____________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{n+\cos n}{n^2-1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-2^n}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{k \in \mathbb{N}, k \to +\infty} \operatorname{sen}^{2k}\left(\frac{\pi}{xy}\right), & \text{se } xy \neq 0, \\ 0, & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

23 de Abril de 2007

3ª ficha de problemas

Nº ______________ Nome ____________________________ Curso ______________

I. Estude quanto a convergência as séries

$$\sum \frac{n + \log n}{n^2 - 1} \qquad \text{e} \qquad \sum 2^{-\cos n}.$$

II. Considere a função $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{k \in \mathbb{N}, k \to +\infty} \operatorname{sen}^{2k}\left(\dfrac{\pi}{x-y}\right), & \text{se } x - y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x - y = 0. \end{cases}$$

a) Obtenha uma expressão para g não envolvendo limites.

b) Determine os pontos de descontinuidade de g.

c) Decida se g é ou não integrável no seu domínio.