Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

2 de Abril de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } x^2+y^2 = 1, \\ x^2+y^2, & \text{se } x^2+y^2 < 1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.

I. a) O domínio de F pode ser decomposto na forma $A \cup B \cup C$ em que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

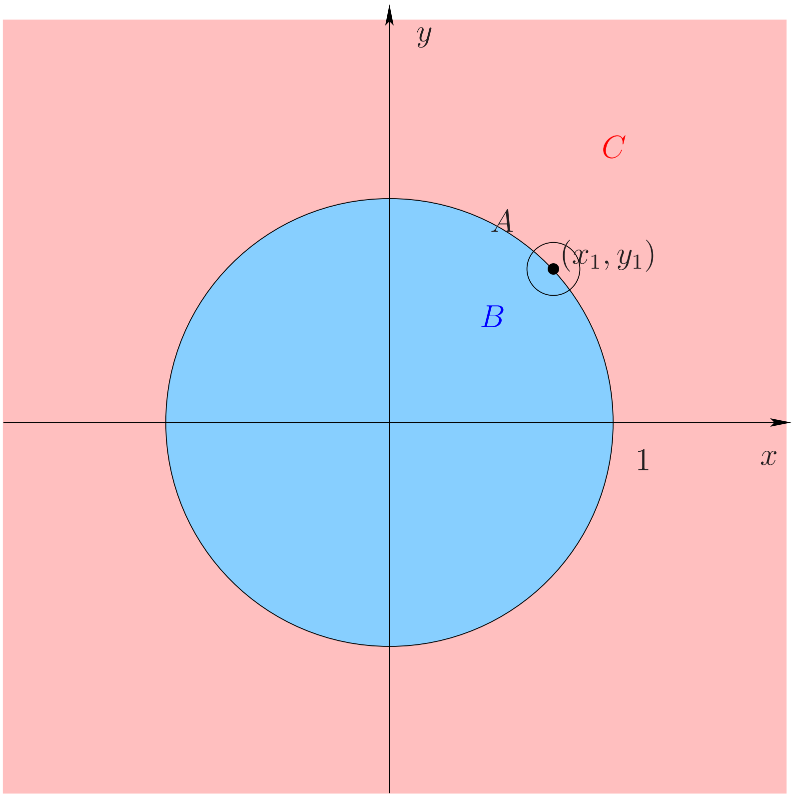

Figura 1: Decomposição do domínio de F.

Como B e C são conjuntos abertos dado um ponto (x_0, y_0) de B ou de C existe uma bola centrada em (x_0, y_0) em que F coincide ou com a função $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ ou com a função $(x, y) \mapsto e^{xy}$. Sendo estas funções contínuas podemos afirmar que F é contínua em $B \cup C$.

Sendo $(x_1, y_1) \in A$ uma qualquer bola centrada neste ponto contém pontos de A, B e C. Sendo assim F será contínua em (x_1, y_1) se e só se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_1,y_1)\\(x,y)\in A}} F(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_1,y_1)\\(x,y)\in B}} F(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_1,y_1)\\(x,y)\in C}} F(x, y),$$

isto é,

$$x_1 = 1 = e^{x_1 y_1},$$

em que $x_1^2 + y_1^2 = 1$. O único ponto de A que verifica tais condições é $(x_1, y_1) = (1, 0)$. Assim F é descontínua em todos os pontos de A excepto em $(1, 0)$ onde é contínua.

b) É óbvio que $F(A) = [-1, 1]$ e $F(B) = [0, 1[$. Além disso C é conexo e para $\lambda > 1$ tanto $(\lambda, \lambda) \in C$ como $(\lambda, -\lambda) \in C$. Além disso $F(\lambda, \lambda) = e^{\lambda^2} \to +\infty$ e $F(\lambda, -\lambda) = e^{-\lambda^2} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$. Por isso, usando o teorema do valor intermédio, $F(C)$ é o contradomínio da função exponencial em $\mathbb{R}$, isto é, $F(C) =]0, +\infty[$. Portanto o contradomínio de F é $[-1, +\infty[$.

II. Considerando $m \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ obtemos

$$g(x, mx) = \frac{m^3 x^4}{(x^2 + m^2 x^2)^2} = \frac{m^3}{(1 + m^2)^2}$$

pelo que os limites das restrições de g a rectas $y = mx$ são distintos na origem e portanto g não tem limite em $(0, 0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

30 de Março de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} y, & \text{se } x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2, & \text{se } x^2+y^2<1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q
2 de Abril de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por F(x,y)=

$$\begin{cases} |y|, & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 < 1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

2 de Abril de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2, & \text{se } x^2+y^2<1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

2 de Abril de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 < 1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q

2 de Abril de 2007

2ª ficha de problemas

I. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} y^2, & \text{se } x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2, & \text{se } x^2+y^2<1, \\ e^{xy}, & \text{se } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

a) Estude F quanto a continuidade.

b) Determine o contradomínio de F.

II. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Decida justificadamente se existe ou não um prolongamento por continuidade de g a $(0,0)$.