



Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\log(xy), \arcsen(x^2 + y^2))$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).



Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\log(x^2 + y^2), \arcsen(x + y))$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).



Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\log(x^2 + y^2), \arcsen(x + y))$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).

I. A região está esboçada na figura 1 a cinzento e a sua projecção no plano  $yz$  marcada com um contorno rosa. A projecção está subdividida em 4 regiões,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$ , que correspondem às projecções das 4 regiões correspondentes a cada uma das parcelas na primeira soma de integrais iterados que se apresenta. Os integrais em  $A_2$  e em  $A_4$  são por sua vez subdivididos na soma de dois integrais iterados para se obter o resultado final.

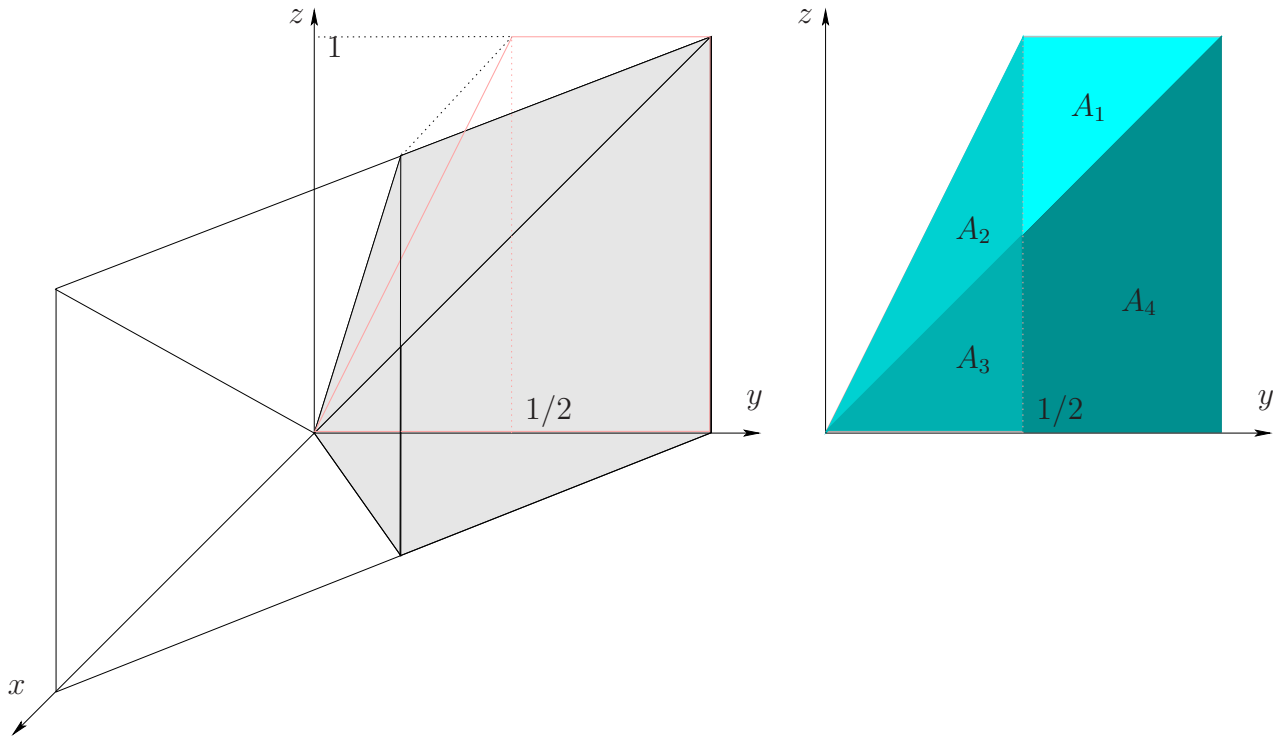


Figura 1: O conjunto  $A$  e a sua projecção no plano  $yz$ .

$$\begin{aligned}
 & \iint_{A_1} \left( \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy dz + \iint_{A_2} \left( \int_{z-y}^y f(x, y, z) dx \right) dy dz \\
 & + \iint_{A_3} \left( \int_0^y f(x, y, z) dx \right) dy dz + \iint_{A_4} \left( \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy dz \\
 & = \int_{1/2}^1 \left( \int_{1/2}^z \left( \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz + \int_{1/2}^1 \left( \int_{z/2}^{1/2} \left( \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\
 & + \int_0^{1/2} \left( \int_{z/2}^z \left( \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz + \int_0^{1/2} \left( \int_z^{1/2} \left( \int_0^y f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\
 & + \int_0^{1/2} \left( \int_{1/2}^1 \left( \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz + \int_{1/2}^1 \left( \int_z^1 \left( \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz
 \end{aligned}$$

II. O domínio deverá ser  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0, |x + y| \leq 1\}$ . Temos

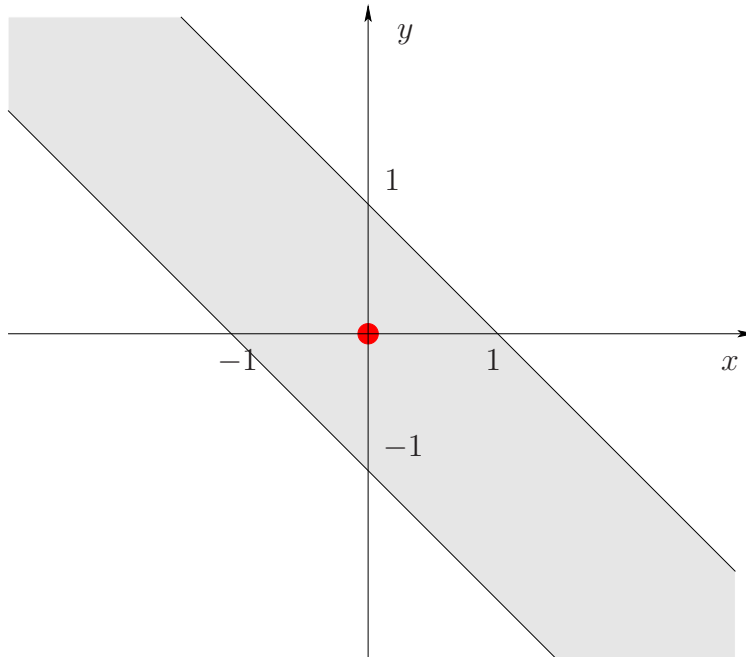


Figura 2: O domínio da função  $(x, y) \mapsto (\log(x^2 + y^2), \arcsen(x + y))$ . O ponto a vermelho está excluído.

$$\begin{aligned} \text{int } A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0 \wedge |x + y| < 1\}, \\ \bar{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}. \end{aligned}$$

O conjunto  $A$  não é aberto pois contém pontos que não são interiores (qualquer pontos sobre as rectas  $x + y = 1$  e  $x + y = -1$ ) e não é fechado pois existe um ponto na sua fronteira que não pertence ao conjunto  $((0, 0))$ .





Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\log(x - y), \sqrt{x + y})$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).



Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\log(x + y), \sqrt{x - y})$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).



Cálculo Diferencial e Integral II  
EBiol, EBiom, EFT, EQ, MAC e Q  
16 de Março de 2007

**1ª ficha de problemas**

---

I. Considere

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x + y, x + y \leq 1, y \geq x \geq 0\}$$

Exprima o integral de uma função integrável  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na forma de um integral iterado (ou soma de integrais iterados)

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy.$$

II. Esboce o domínio duma função definida num subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}^2$  por  $h(x, y) = (\arccos(x + y), \log(x - y))$ . Decida se se trata de um conjunto aberto ou fechado e determine o seu interior ( $\text{int } A$ ), o seu fecho ( $\overline{A}$ ) e a sua fronteira ( $\partial A$ ).