Cálculo Diferencial e Integral II

1º Exame

Campus da Alameda — **25 de Junho de 2007, 9 horas**

Engenharia Biológica, Engenharia Biomédica,
Engenharia Física, Engenharia de Materiais, Engenharia Química,
Matemática Aplicada e Computação, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Calcule o volume do subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, |y| \leq x \leq 1\}$$

(3,5) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o integral iterado

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x+y)\, dz \right) dx \right) dy.$$

Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, para obter uma expressão alternativa para o integral iterado.

II. 1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg}(y/x), & \text{se } x \neq 0, \\ (x^2 + y^2) \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Estude g quanto a continuidade.
b) Estude g quanto a diferenciabilidade.
c) Mostre que a derivada dirigida $D_{(x,y)} g(x, y)$ existe para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e calcule-a.

2. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tem a forma $F(x, y) = \phi(x^2 - y^2)$ para uma certa função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que (x_0, y_0) é um ponto de estacionaridade de F se e só se ou $x_0^2 - y_0^2$ é um ponto de estacionaridade de ϕ ou $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

3. Considere uma aplicação $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto G(x, y) = (e^{x-y+x^4y^4}, e^{x+y+x^2y^5})$. Mostre que existe uma bola centrada em $(0, 0)$ em que esta aplicação é injectiva com inversa C^1 e, designando a inversa por θ determine $D\theta(1, 1)$.

III. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n} x^n$.

a) Determine para que valores de x é que a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Mostre que existe uma vizinhança de 0 onde aquela série define uma função crescente.

IV. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = (1 - 2x^2 - y^2)xy$. Mostre que:

a) h não possui pontos de extremo absoluto.

b) h possui só quatro pontos de extremos local, dois deles pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

V. 1. Um caminho $r \in C^1$ definindo uma linha L tem início na origem em $\mathbb{R}^3$ e termina num ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcule o integral de linha

$$\int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

2. Calcule a área da superfície $z = xy$ contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

VI. Calcule o fluxo do campo $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2 - 2xz - 2yz)$ através da fronteira da região $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ no sentido da respectiva normal exterior.