

Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício modelo para

23 de Maio a 9 de Junho de 2000

Exercício.

- a) Determine justificadamente uma função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja:

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}(f)(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + s + 1}.$$

- b)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}(f)(s) = \frac{1}{s}G(s+1) \tag{1,5}$$

em que G designa a transformada de Laplace da função definida por $\sqrt{t}e^{-t}$ para $t > 0$.

Esboço de resolução.

- a) Começamos por notar¹ que se $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ possui transformada de Laplace $G(s)$ então, definindo para $t > \tau > 0$, $g_\tau(t) = g(t - \tau)$ temos, designando a transformada de Laplace de g_τ por G_τ ,

$$\begin{aligned} G_\tau(s) &= \int_0^{+\infty} g_\tau(t)e^{-st} dt = \int_\tau^{+\infty} g(t - \tau)e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} g(u)e^{-s(u+\tau)} du = e^{-s\tau}G(s). \end{aligned}$$

Em particular com $\tau = 2$ isto permite reduzir esta alínea a encontrar uma função cuja transformada de Laplace seja $\frac{s}{s^2+s+1}$. Como

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + s + 1} &= \frac{s}{(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} - \frac{\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \end{aligned}$$

¹Esta resolução inclui a redemonstração de algum material conhecido que obviamente podia ser omitido.

verificamos que $\frac{s}{s^2+s+1}$ é a transformada de Laplace da função definida por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}i}\right) e^{-(1+i\sqrt{3})t/2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}i}\right) e^{-(1-i\sqrt{3})t/2} = \\ & = e^{-t/2} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Assim podemos considerar

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 2, \\ e^{-(t-2)/2} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}(t-2)}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}(t-2)}{2}\right) \right], & \text{para } t \geq 2. \end{cases}$$

b) Usando directamente a definição de transformada de Laplace

$$\frac{1}{s}G(s+1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+1)t}}{s} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} e^{-t} f(t) dt.$$

Integrando por partes na última expressão obtém-se

$$\frac{1}{s}G(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} (e^{-t} f(t)) dt$$

pelo que podemos tomar $f(t) = \frac{d}{dt} (e^{-t} f(t))$.