Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício modelo para

6 a 16 de Maio de 2000

Exercício. Determine $u(t,x)$ definida em $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \cos x, \\ u(0,x) = \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen} x, & \text{para } x \in [0,2\pi], \\ u(t,x) = u(t,x+2\pi), & \text{para } t \geq 0, x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

[**Nota**: É fácil determinar uma solução particular da equação.]

Esboço de resolução. Vamos tentar obter uma solução do problema usando separação de variáveis mas primeiro, tendo em conta a sugestão, tentamos decompor a solução do problema na forma $u = u_h + u_p$ em que u_h é uma solução da equação homogénea e u_p é uma solução particular da equação completa. Como o segundo membro da equação é só função de x tentaremos arranjar u_p que só dependa de t, isto é, $u_p(t,x) = g(x)$. Uma tal solução particular deverá satisfazer a equação linear de segunda ordem e coeficientes constantes.

$$-g'' + g = \cos x. \tag{2}$$

Tal equação, usando o método do aniquilador, deverá ter soluções particulares da forma $g(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$ para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Introduzindo tal expressão na equação (2) obtém-se

$$2\alpha \operatorname{sen} x + 2\beta \cos x = \cos x$$

pelo que $\alpha = 0$ e $\beta = 1/2$, ou seja, $u_p(t,x) = \frac{1}{2}\cos x$. Assim u_h deverá satisfazer o seguinte problema[1]

$$\begin{cases} \frac{\partial u_h}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + u_h = 0, \\ u_h(0,x) = \operatorname{sen} x, & \text{para } x \in [0,2\pi], \\ u_h(t,0) = u_h(t,2\pi), & \text{para } t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

É a este problema que aplicamos o método de separação de variáveis. Começamos por procurar soluções da forma

$$u_h(t,x) = \sum_{\lambda} c_\lambda v_\lambda(t) w_\lambda(x)$$

[1] Observe porque é que as condições iniciais mudam.

em que λ varia num conjunto contável e em que cada produto $v_\lambda(t)w_\lambda(x)$ é solução da equação. Introduzindo $v_\lambda(t)w_\lambda(x)$ na equação de (3) obtemos

$$v'_\lambda(t)w_\lambda(x) - v_\lambda(t)w''_\lambda(x) + v_\lambda(t)w_\lambda(x) = 0$$

donde

$$\frac{v'_\lambda(t)}{v_\lambda(t)} = \frac{w''_\lambda(x) - w_\lambda(x)}{w_\lambda(x)}.$$

Como o segundo membro é uma função de x e o primeiro uma função de t procuramos soluções satisfazendo

$$\frac{v'_\lambda(t)}{v_\lambda(t)} = \lambda = \frac{w''_\lambda(x) - w_\lambda(x)}{w_\lambda(x)}$$

ou seja

$$\begin{cases} v'_\lambda = \lambda v_\lambda, \\ w''_\lambda = (\lambda+1)w_\lambda, \end{cases}$$

para uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Para a primeira das equações obtemos $v_\lambda(t) = \gamma e^{\lambda t}$. Para a segunda obtemos:

- Se $\lambda = -1$ então $w_{-1}(x) = k_1 x + k_2$.
- Se $\lambda > -1$ então $w_\lambda(x) = k_1 e^{\sqrt{\lambda+1}x} + k_2 e^{-\sqrt{\lambda+1}x}$.
- Se $\lambda < -1$ então $w_\lambda(x) = k_1 \cos(\sqrt{-\lambda-1}x) + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda-1}x)$.

Como procuramos soluções periódicas de período 2π em x tentamos que w_λ verifique tal propriedade. Para $\lambda = -1$ tal é possível se w_{-1} for constante, para $\lambda > -1$ só é possível se w_λ for nula e para $\lambda < -1$ só é possível se $\sqrt{-\lambda-1} = m$, $m \in \mathbb{N}$.

Somos levados assim a considerar $u_h(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} e^{-(m^2+1)t}(c_m \cos(mx) + d_m \operatorname{sen}(mx))$. A condição para $u_h(0,x)$ permite então descobrir que obtemos uma solução para o problema (3) na forma

$$u_h(t,x) = e^{-2t} \operatorname{sen} x$$

ou, para o problema original

$$u(t,x) = e^{-2t} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos(2x).$$