

# Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão  
Exercício-teste para

6 a 12 de Maio de 2000

**Exercício.** Determine as soluções gerais e as soluções particulares satisfazendo  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  da seguinte equação:

$$y'' + y = e^{-x} + \cos x.$$

**Esboço de resolução.** O polinómio característico para este operador diferencial linear de coeficientes constantes é  $D^2 + 1$ . A solução geral da equação homogénea é

$$y_h(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Aplicando os operadores  $D^2 + 1$  e  $D + 1$  a ambos os membros da equação verificamos que as soluções da equação particular estarão entre as soluções de

$$(D^2 + 1)^2(D + 1)v = 0$$

Esta equação tem solução geral

$$v(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x \sin x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}.$$

Reintroduzindo tais soluções na equação original verificamos que devemos satisfazer

$$(D^2 + 1)(C_3 x \sin x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}) = e^{-x} + \cos x$$

ou, efectuando os cálculos no primeiro membro,

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)(C_3 x \sin x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}) &= \\ &= C_3 x \sin x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x} + \\ &\quad + D(C_3 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 \cos x - C_4 x \sin x - C_5 e^{-x}) = \\ &= 2C_5 e^{-x} + 2C_3 \cos x - 2C_4 \sin x, \end{aligned}$$

pelo que

$$2C_5 e^{-x} + 2C_3 \cos x - 2C_4 \sin x = e^{-x} + \cos x$$

o que implica  $C_5 = 1/2$ ,  $C_3 = 1/2$ ,  $C_4 = 0$ . Assim a solução geral da equação original é

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

---

A solução do problema satisfazendo as condições iniciais é agora determinável a partir de

$$\begin{cases} y(0) = C_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(0) = C_1 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

pelo que será

$$y(x) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$