Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício modelo para a semana de

5 a 12 de Abril de 2000

Exercício.

a) Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x+iy) = u(x,y) + ie^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y)$$

em que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar u de maneira a

$$\oint_L f(z)\,dz = 0$$

para toda a linha fechada regular L no plano complexo. Na afirmativa calcule uma tal função u.

b) Considere, para $R > 0$, a linha C_R definida em $\mathbb{C}$ por

$$z(t) = \begin{cases} t & \text{para } t \in [-R, R] \\ Re^{i(t-R)} & \text{para } t \in [R, R+\pi] \end{cases}$$

e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq R, R^{-1}, \operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$. Calcule

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz.$$

Use esse cálculo para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}\,dx.$$

c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que 0 é um polo de ordem k de h e para $j \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\,dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{(j+2)!} & \text{para } j \geq -2 \\ 0 & \text{para } j < -2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa determine k e calcule o desenvolvimento de Taylor de $z^k h(z)$ em torno de 0 e o respectivo raio de convergência.

Esboço de resolução.

a) O teorema de Morera garante[1] que todos esses integrais serem 0 implica a holomorfia da função. Se a função é holomorfa deverá verificar as condições de Cauchy-Riemann donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y)\right) = e^{-x}(-x\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y\cos y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y)\right) = e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y - \cos y)$$

Primitivando ambas as expressões em ordem a x e y respectivamente obtém-se

$$u(x,y) = e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y) + h_1(y)$$
$$u(x,y) = e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y) + h_2(x)$$

para algumas funções h_1, h_2 pelo que deveremos ter para alguma constante $C \in \mathbb{R}$

$$u(x,y) = e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y) + C$$

Como u e a parte imaginária são funções C^∞ não há dúvida que tal função será analítica em $\mathbb{C}$ (inteira).

Alternativamente não é difícil reconhecer que $f(z) = ze^z + C$ satisfaz todas as propriedades desejadas.

b) A linha C_R está esboçada na figura 1 e dois exemplos de posições relativas de α quando $\Im(\alpha) > 0$ e quando $\Im(\alpha) < 0$ (neste último caso indicado como α'). Distinguimos quatro casos:

$\Im(\alpha) > 0$, $|\alpha| > R$. Neste caso não há singularidades da função na região limitada pela linha e o teorema de Cauchy permite concluir que o integral é 0.

$\Im(\alpha) < 0$, $|1/\alpha| > R$. Idem.

$\Im(\alpha) > 0$, $|\alpha| < R$. A fórmula integral de Cauchy ou teorema dos resíduos permite reconhecer que

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz = 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{\alpha z - 1}\right]\Bigg|_{z=\alpha} = 2\pi i \frac{e^{i\alpha}}{\alpha^2 - 1}.$$

$\Im(\alpha) < 0$, $|1/\alpha| < R$. De forma análoga a fórmula integral de Cauchy ou teorema dos resíduos permite reconhecer que

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz = 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{\alpha(z-\alpha)}\right]\Bigg|_{z=1/\alpha} = 2\pi i \frac{e^{i/\alpha}}{1 - \alpha^2}.$$

[1] Se conhece uma versão do teorema de Morera em cuja hipótese é mencionada uma família de caminhos *seccionalmente* C^1 note que tais caminhos podem ser aproximados por caminhos regulares...

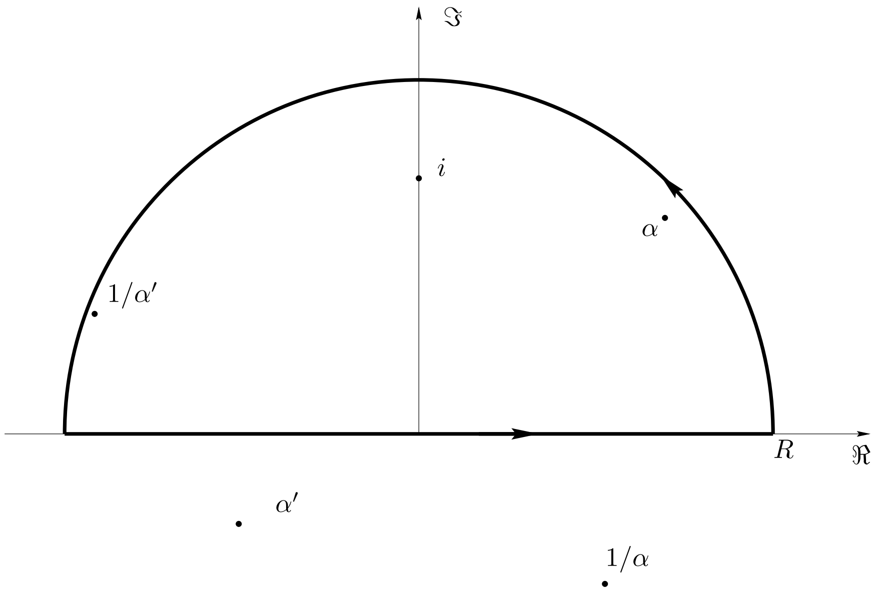

Figura 1: A linha C_R.

Para resolver a última questão desta alínea começamos por notar que a restrição da função integranda ao eixo real ($\Im(z) = 0$) é exactamente

$$\frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}.$$

Decompondo a linha na parte correspondendo ao segmento de recta, designemo-la por L_R, e na parte correspondente à semi-circunferência, designemo-la por S_R, verificamos, usando o teorema da convergência dominada, que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}\,dx\end{aligned}$$

Tal é possível graças à função integranda sobre o eixo real ser majorável por $\frac{C}{1+x^2}$ para algum $C > 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz = \\ &\qquad = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it}-\alpha)(\alpha Re^{it} - 1)} Rie^{it}\,dt = 0\end{aligned}$$

em que a última igualdade decorre, via teorema da convergência dominada, de podermos majorar[2] o módulo da função integranda por $\frac{CR}{R^2+1}$ para

[2]Note que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R\operatorname{sen} t} \leq 1$.

alguma constante $C > 0$ e estarmos a integrar num intervalo limitado. Assim, como para R suficientemente grande $R > \max(|\alpha|, 1/|\alpha|)$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}\, dx = \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{i\alpha}}{\alpha^2-1}, & \text{se } \Im(\alpha) > 0, \\ 2\pi i \frac{e^{i/\alpha}}{1-\alpha^2}, & \text{se } \Im(\alpha) < 0. \end{cases}$$

c) Se uma tal função existir poderemos escrever

$$h(z) = \sum_{l=k}^{+\infty} c_l z^l = c_{-k} z^{-k} + c_{-k+1} z^{-k+1} + \dots + c_0 + c_1 z + \dots$$

Ora, usando a possibilidade de integrar termo a termo séries de potências no seu círculo de convergência,

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \oint_\gamma \sum_{l=k}^{+\infty} c_l z^{l-j}\, dz = \sum_{l=k}^{+\infty} \oint_\gamma c_l z^{l-j}\, dz = 2\pi i c_{j-1}$$

donde deveremos ter

$$c_{j-1} = \begin{cases} \frac{1}{(j+2)!}, & \text{se } j \geq -2, \\ 0, & \text{se } j < -2, \end{cases}$$

Assim o único possível candidato a h deverá ter a forma

$$h(z) = z^{-3} + z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \dots + \frac{1}{s!} z^{s-3} + \dots = \frac{e^z}{z^3}.$$