Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício modelo para a semana de

20 de Março de 2000

Exercício. Considere uma função f complexa de variável complexa definida por cada uma das seguintes fórmulas:

1. $f(z) = \overline{z}$;
2. $f(z) = z$;
3. $f(z) = z^{-1}$;
4. $f(z) = e^z$;
5. $f(z) = \frac{e^z}{z}$;

Para cada uma destas funções calcule os integrais

$$\oint_C f(z)\,dz, \qquad \int_S f(z)\,dz$$

ou justifique a não existência do integral em que C é a circunferência de raio 1 centrada em 0 percorrida uma vez no sentido directo e S está definida por $z(t) = e^{-(1+i)t}$, $t \in [0, +\infty[$.

Esboço de resolução. C pode ser parametrizado por $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1. $\oint_C \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\,dt = 2\pi i$.

   $\int_S \overline{z}\,dz = \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t}(-(1+i))e^{-(1+i)t}\,dt = -(1+i)\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = -\frac{1+i}{2}$.

2. $z = \frac{dg}{dz}$ em que $g(z) = \frac{z^2}{2}$ em $\mathbb{C}$ pelo que o primeiro integral é 0 e o segundo é igual $g(0) - g(1) = -\frac{1}{2}$.

3. Sobre a circunferência de raio 1 centrada em 0 temos $\overline{z} = 1/z$ de maneira que o primeiro integral coincide com o primeiro da primeira alínea.

   Teríamos $\int_S \frac{1}{z}\,dz = -(1+i)\int_0^{+\infty} e^{(1+i)t} e^{-(1+i)t}\,dt$ mas o integral do segundo membro não existe.

4. De forma idêntica à da segunda alínea o primeiro integral vale 0 e o segundo vale $e^0 - e^1 = 1 - e$.

5. Podemos escrever $\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + G(z)$ em que $G(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}$. Usando a terceira alínea e lidando com G como se fez na segunda ou na quarta conclui-se que o primeiro integral vale $2\pi i$ e o segundo não existe.

Comentário. *As resoluções apresentadas não recorrem ao teorema de Cauchy, fórmula integral de Cauchy ou teorema dos resíduos que nalguns casos permitiriam simplificar o argumento.*