Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício-teste para

5 a 14 de Abril de 2000

Exercício.

a) Uma função $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(x+iy) = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} + iv(x,y)$$

em que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar v de maneira a f ser analítica em $B_1(0)$. Na afirmativa determine o desenvolvimento de Taylor de f em potências de z.

b) Considere, para $a > 0$, a linha L_a definida em $\mathbb{C}$ por um caminho $z(t)$ que percorre a fronteira do rectângulo $\{x+iy \in \mathbb{C} : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ uma vez no sentido directo. Seja $k \in]0,1[$. Calcule

$$\oint_{L_a} \frac{e^{kz}}{1+e^z}\, dz.$$

Use esse cálculo para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\, dx.$$

c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que para $j \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \begin{cases} 2\pi i/(j-1)!, & \text{para } j \in \mathbb{N} \text{ par,} \\ 0, & \text{nos restantes casos,} \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa classifique a singularidade de h em 0.