

Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício suplementares para a semana de

20 de Março de 2000

Exercício 1 Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x + iy) = u(x, y) + ie^{-x}(x \cos y + y \sin y)$$

em que $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar u de maneira a

$$\oint_L f(z) dz = 0$$

para toda a linha fechada regular L no plano complexo. Se optar pela afirmativa calcule uma tal função u .

Exercício 2 Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C} e uma função analítica $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para $j \in \mathbb{N}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j} dz = \begin{cases} -\pi i & \text{para } j \geq 2 \\ 0 & \text{para } 0 \leq j < 2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0 , percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U . Se a sua resposta fôr afirmativa determine h e o “maior” U possível.

Exercício 3 Volte a considerar o exercício modelo e o exercício teste. Decida em que casos pode aplicar o teorema de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy na sua resolução.