Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício suplementares para a semana de

13 de Março de 2000

Exercício 1 a) Determine a solução do problema

$$y' = \frac{x+y}{x-y}\ , \qquad y(1) = 0.$$

O que é que pode afirmar sobre a unicidade de solução deste problema?

b) Determine em que condições uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

tem um factor integrante que é função de xy, isto é, da forma $\mu(xy)$ para uma certa função μ, real de variável real . Determine uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ. Determine a solução geral de

$$\frac{1}{x^2y + xy^2} + 3x + \left(\frac{1}{x^2y + xy^2} + \frac{x^2}{y}\right) y' = 0.$$

Exercício 2 Considere uma equação diferencial da forma

$$y' + P(t)y = Q(t)y^\alpha$$

com $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

a) Mostre que existe $\beta \equiv \beta(\alpha)$ tal que a substituição $v(t) = y^\beta(t)$ transforma a equação numa equação diferencial linear de primeira ordem.

b) Aproveite o resultado da alínea anterior para resolver o problema

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t} = y^2, \\ y(1) = c > 1. \end{cases}$$

c) Seja $g(t,y)$ uma função de classe C^1 satisfazendo $g(t,y) \geq 1$ para $t \geq 1$ e $y \geq 0$. Mostre que não há soluções de

$$\begin{cases} y' = g(t,y)(y^2 - \frac{y}{t}), \\ y(1) = c > 1. \end{cases}$$

definidas em $[1, e^{1/c}]$.