# Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Solução do exercício teste da semana de

29 de Março a 4 de Abril de 2000

**Exercício.** Considere as linhas fechadas:

$C_1$ definida por $z(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

$C_2$ definida por $z(t) = 1 + i + \frac{1}{2}e^{-it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

$C_3$ definida por $z(t) = \cos t + i(2\operatorname{sen} t - 1)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

$C_4$ definida por $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Calcule

$$\int_{C_k} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z^4+1)}\, dz$$

para $k = 1, 2, 3, 4$.

**Esboço de resolução.** As diversas linhas estão esboçadas na figura. Uma das linhas é uma elipse e as restantes são circunferências. [Atente nos sentidos indicados, nos centros e nos raios das circunferências e nos eixos da elipse].

Dos singularidades isoladas da função integranda só 1 se encontra na região limitada por $C_1$ que é percorrida uma vez no sentido directo. Trata-se de um pólo de segunda ordem pois a função sen não se anula neste ponto. Daí que

$$\int_{C_1} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z^4+1)}\, dz = 2\pi i \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z+1)^2(z^4+1)}\right)\right]\Bigg|_{z=1}.$$

Dos singularidades isoladas da função integranda só $e^{i\pi/4}$ se encontra na região limitada por $C_2$ que é percorrida uma vez no sentido retrógado. Trata-se de um pólo de primeira ordem pois a função sen não se anula neste ponto.

$$\int_{C_2} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z^4+1)}\, dz =$$
$$= -2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i3\pi/4})(z-e^{-i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{i\pi/4}}.$$

Dos singularidades isoladas da função integranda $e^{-i\pi/4}$, $e^{-i3\pi/4}$ e 0 encontram-se na região limitada por $C_3$ que é percorrida uma vez no sentido directo. Os dois primeiros são pólos de primeira ordem pois a função sen não se anula naqueles pontos. No entanto o sen anula-se na origem e como

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

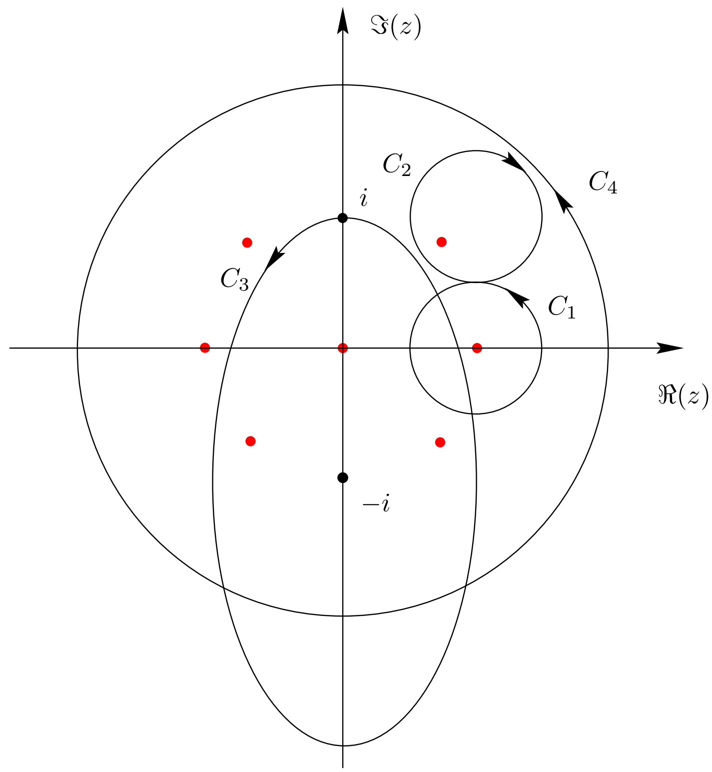


Figura 1: Esboço das linhas $C_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Os sete pequenos círculos vermelhos indicam as singularidades isoladas da função integranda (em $0, 1, -1, e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}$ sendo os últimos quatro as raízes quartas de $-1$).

a origem é uma singularidade removível. Assim

$$\int_{C_3} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z^4+1)}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i3\pi/4})(z-e^{i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{-i\pi/4}} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i\pi/4})(z-e^{i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{-i3\pi/4}} .$$

Todas as singularidades isoladas da função integranda estão na região limitada por $C_4$ que é percorrida uma vez no sentido directo. O valor do integral é então de forma análoga

$$\int_{C_4} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z^4+1)}\,dz =$$

$$2\pi i \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z+1)^2(z^4+1)}\right)\right]\Bigg|_{z=1} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i3\pi/4})(z-e^{-i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{i\pi/4}} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i3\pi/4})(z-e^{i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{-i\pi/4}} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{-i\pi/4})(z-e^{i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{-i3\pi/4}} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2-1)^2(z-e^{-i3\pi/4})(z-e^{-i\pi/4})(z-e^{i\pi/4})}\right]\Bigg|_{z=e^{i3\pi/4}} +$$

$$+ 2\pi i \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2(z^4+1)}\right)\right]\Bigg|_{z=-1} .$$