Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Solução do exercício teste da semana de

22 de Março de 2000

Exercício 1 Determine a solução de

$$\begin{cases} xy' + y = y^2x^2 \log x, \\ y(1) = 1/2, \end{cases}$$

usando $w(x) = y^k(x)$ com k conveniente para transformá-la numa equação linear de primeira ordem.

Exercício 2 Uma equação diferencial da forma

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

com $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, designa-se por equação de Riccati.

a) Mostre que se u é uma solução da equação de Ricatti, então existem soluções adicionais da forma $y = u + 1/v$, em que v satisfaz uma equação linear de primeira ordem.

b) A equação de Riccati $y' + y + y^2 = 2$ tem duas soluções constantes. Determine-as e use-as para determinar soluções adicionais pelo processo da alínea anterior.

Esboço de resolução.

1. Começamos por determinar uma equação diferencial ordinária satisfeita por um tal w. Supondo $k \neq 0$ ($k = 0$ com certeza que não conduziria a nada de interesse) temos $w'(x) = ky^{k-1}y'$ e portanto $yw' = kwy'$. Assim substituindo y por $w^{1/k}$ e usando a relação anterior[1]

$$xw^{1/k}w'/(kw) + w^{1/k} = w^{2/k}x^2 \log x$$

ou

$$xw' + kw = kw^{(k+1)/k}x^2 \log x.$$

Esta equação é linear se $k = -1$, isto é, se fixermos $w(x) = 1/y(x)$. Podemos transformar soluções de uma equação nas da outra desde que estas não se anulem. Consideremos então

$$\begin{cases} w' - w/x = -x \log x, \\ w(1) = 2. \end{cases}$$

[1] Este cálculo está a ser feito formalmente; teremos que eventualmente estudar se obtemos de facto uma equação equivalente.

Todas as soluções para $x > 0$ (note a condição inicial) desta equação são dadas por

$$w(x) = Ce^{\int 1/x\,dx} - e^{\int 1/x\,dx} \int e^{-\int 1/x\,dx} x \log x\,dx =$$
$$Cx - x \int \log x\,dx = Cx - x(x \log x - x).$$

e a solução particular satisfazendo a condição inicial dada será

$$w(x) = x - x(x \log x - x)$$

a que corresponderá

$$y(x) = \frac{1}{x + x^2 - x^2 \log x}.$$

[Note que é impossível prolongar esta solução da equação para $x < 0$ e que esta solução é positiva em $]0, +\infty[$. Nestas condições é perfeitamente legítimo transformar as equações para y em equações para w da forma utilizada.]

2. (a) Substituindo y por $u + 1/v$ na equação obtém-se

$$u' + P(x)u + Q(x)u^2 - \frac{v'}{v^2} + \frac{P(x)}{v} + Q(x)(\frac{2u}{v} + \frac{1}{v^2}) = R(x)$$

o que, atendendo a que u é solução, leva a v satisfazer

$$-\frac{v'}{v^2} + \frac{P(x)}{v} + Q(x)(\frac{2u}{v} + \frac{1}{v^2}) = 0.$$

Assim v também satisfará a equação linear

$$v' - P(x)v - Q(x)(2uv + 1) = 0.$$

(b) Se $y(x) = c$ com $c \in \mathbb{R}$ então $c + c^2 = 2$ donde as duas soluções constantes corresponde a $c = 1$ e $c = -2$. Assim obteremos soluções adicionais da equação de Riccati considerando $1 + 1/v$ e $-2 + 2/w$ em que v e w são soluções das equações

$$v' - v - (2v + 1) = 0,$$
$$w' - w - (-4w + 1) = 0.$$

Estas têm soluções gerais $v(x) = \alpha e^{3x} - \frac{1}{3}$ e $w(x) = \beta e^{-3x} + \frac{1}{3}$.

Comentário. *Tanto a equação de Bernoulli como a equação de Riccati são tópicos clássicos em equações diferenciais ordinárias e referências adicionais podem encontrar-se em vários livros da bibliografia.*