Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Solução do exercício teste da semana de

20 de Março de 2000

Exercício. Considere uma função f complexa de variável complexa definida por cada uma das seguintes fórmulas:

1. $f(z) = |z|$;
2. $f(z) = z^2$;
3. $f(z) = z^{-2}$;
4. $f(z) = \cos z$;
5. $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

Para cada uma destas funções calcule os integrais

$$\oint_C f(z)\,dz, \qquad \int_L f(z)\,dz$$

ou justifique a não existência do integral em que C é a circunferência de raio 1 centrada em 0 percorrida uma vez no sentido directo e L é o segmento de recta unindo 1 a 0.

Esboço de resolução. Consideramos quando necessário as parametrizações $z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ para C e $z(t) = 1 - t, t \in [0, 1]$ para L.

1. Como a função não é holomorfa usamos a definição de integral em ambos os casos.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} 1ie^{it}\,dt = 0$$
$$\int_L f(z)\,dz = \int_0^1 1 - t(-1)\,dt = -1/2$$

2. Temos $z^2 = \frac{d}{dz}(\frac{z^3}{3})$ pelo que

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$
$$\int_L f(z)\,dz = -1/3.$$

3. Temos $z^{-2} = \frac{d}{dz}(z^{-1})$ pelo que

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Como $1/z^2$ não é holomorfa numa vizinhança do segmento L usamos a definição para obter que se o integral existisse

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt.$$

Como o integral do segundo membro não existe...

4. Como $\cos z$ é holomorfa em $\mathbb{C}$

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$
$$\int_L f(z)\,dz = \cos 1 - \cos 0 = \cos 1 - 1.$$

5. Para calcular o integral no primeiro caso usando unicamente o teorema de Cauchy[1] escrevemos

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2} - \dots\right) = \frac{1}{z} + h(z)$$

em que h é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ [2]. Logo, invocando o teorema de Cauchy

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{1}{z} 1\,dz = 2\pi i.$$

Tal como na alínea (3) o integral sobre L reduz-se a um integral $-\int_0^1 \frac{\cos(1-t)}{1-t}\,dt$ que não existe[3].

[1] Era este o estado de coisas à data deste teste. Claro que agora se pode usar a fórmula integral de Cauchy ou o teorema dos resíduos.

[2] Prove-o calculando o raio de vconvergência da série.

[3] $\cos(1-t) \geq \cos 1$ quando $t \in [0,1]$ o que permite reduzir à situação da alínea (3).