Exame de Análise Matemática IV

17 de Janeiro de 1995

Justifique todas as suas respostas

(2,5) **1** a) Sejam $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ e $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Decida se alguma das duas funções $f, g : S \to \mathbb{C}$ definidas por

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g(z) = \overline{f(z)}$$

é analítica num subconjunto aberto de S. Se nalgum caso optar pela afirmativa identifique tal conjunto.

(2,5) b) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Identifique todos valores de α para os quais a função h definida por $h(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)^2}$ é limitada sobre a linha L definida pelo caminho $r(t) = 4\cos t + i(\alpha + 4\,\mathrm{sen}\, t)$, com $t \in [-\pi, \pi]$. Para tais valores calcule

$$\oint_L \frac{1}{(z-i)(z+i)^2}\, dz.$$

(1) c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \to \mathbb{C}$ tal que para $j \in \mathbb{N}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \begin{cases} -\pi i & \text{para } j \geq 2 \\ 0 & \text{para } 0 \leq j < 2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa determine h e o "maior" U possível.

(2,0) **2** a) Determine a solução do problema

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \qquad y(1) = 0.$$

O que é que pode afirmar sobre a unicidade de solução deste problema?

(2,5) b) Determine se a equação diferencial $x^2y + (x^3 + y^3)y' = 0$ tem factores integrantes só dependentes da variável y. Em caso afirmativo determine o factor integrante e a solução geral da equação. Determine soluções particulares que satisfaçam $y(-1) = -1$ e $y(-1) = 0$.

(2,5) **3** Determine a solução particular do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + \frac{e^t}{e^{-t}+1} \end{cases}$$

que satisfaz $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

(2,5) **4** Determine uma função $u(x, y)$ contínua e definida em $[0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{para } (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & \text{para } x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(1, y) = \operatorname{sen}^3(y) & \text{para } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

5 Considere $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$H(x, y, z) = (x((x-1)^2 + z^2 - 1), y((y-1)^2 + z^2 - 1), xyz)$$

e a variedade bidimensional T definida por

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$$

Calcule

$$\int_T \operatorname{rot} H \cdot n \, dV_2$$

em que n designa a normal unitária a T com componente segundo z positiva.

(1,0) **6** Seja $H : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $t \leq |f(t)| \leq t^2$. O que é que pode dizer sobre as soluções da equação

$$y' + t^2 y = H(t)$$

serem ou não funções limitadas em $[1, +\infty[$?