Análise Matemática IV
2º Teste / 1º Exame

26 de Junho de 2000

Engenharia Electrotécnica, ramo de Telecomunicações

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Vire a página para realizar o 2º teste

(2,0) **I.** 1. Considere a equação diferencial

$$ty' - 2y = te^{1/t}.$$

Determine a solução geral desta equação e a solução particular que satisfaz $y(1) = 1$.

(2,0) 2. Determine a solução geral do problema $y^{(4)} - y = \cos x$.

(2,0) 3. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} u' &= u + v \\ v' &= u - w \\ w' &= v + w \end{cases}$$

Determine a sua solução geral $(u(t), v(t), w(t))$.

(2,0) 4. Considere uma equação diferencial da forma $y' = h(t, y)$ em que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, não negativa, periódica na variável t de período 1 (isto é $h(t+1, y) = h(t, y)$ para todos os t e y) e satisfazendo

$$h(t, y) \geq 1 + y^2, \qquad \text{para } t \in [1/2, 1] \text{ e todo o } y.$$

Mostre que não existem soluções daquela equação definidas no intervalo $[0, +\infty[$.

(2,0) 5. Considere o sistema diferencial de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = e^{xy} + x - 1, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$

Por linearização esboce o espaço de fase do sistema numa vizinhança "pequena" de $(0, 0)$.

(2,0) **II.** 1. Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) + U(t,x) = 0, & \text{para } t \in \,]0,+\infty[,\ x \in \,]0,1[, \\ U(0,x) = \operatorname{sen} \pi x, & \text{para } x \in [0,1], \\ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \operatorname{sen} 3\pi x, & \text{para } x \in [0,1]. \\ U(t,0) = U(t,1) = 0, & \text{para } t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

(2,0) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e satisfazendo

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi \le t < 0, \\ \operatorname{sen} t, & \text{se } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento em série de Fourier desta função e a soma da série.

(2,0) 3. Uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ possui transformada de Laplace

$$G(s) = \frac{(s-1)e^{-s}}{s^2 - 2s + 2}.$$

Determine g.

(2,0) 4. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$ e nula em $]1,+\infty[$ e em $]-\infty,0[$. Define-se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via

$$q(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(t-k).$$

Relacione as transformadas de Laplace de p e q.

(2,0) 5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função de quadrado integrável em $[0,1]$. Determine funções reais definidas em $[0,1]$ ortogonais duas a duas (para o produto interno $g \cdot h = \int_0^1 g(t)h(t)\,dt$) que formem uma base para o espaço vectorial gerado pelos polinómios 1, t e t^2. Aproveite para obter expressões para os coeficientes c_0, c_1, c_2 que minimizam

$$\int_0^1 \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 - f\right)^2 dt.$$