Análise Matemática IV
2º Exame

12 de Julho de 2000

Engenharia Electrotécnica, ramo de Telecomunicações

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0) 1. Considere uma equação diferencial

$$(xy + x\log x)y' + y = 0.$$

Determine se a equação tem um factor integrante só dependente de uma das variáveis e em caso afirmativo use essa informação para determinar a sua solução geral.

(2,0) 2. Considere a equação diferencial

$$y''' - y' = \cos t.$$

Determine a solução geral desta equação e caracterize todos os $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que a solução satisfazendo $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = \gamma$ é uma função limitada em $[0, +\infty[$.

(2,0) 3. Determine a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -v - \cos t, \\ \frac{dv}{dt} = u, \\ u(0) = 1, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

(2,0) 4. Considere o sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

a) Esboce o espaço de fase deste sistema numa vizinhança pequena de $(0, 0)$.

b) Mostre $\lim_{t\to\infty} x_1^2(t) + x_2^2(t) = +\infty$ para todas as soluções com condições iniciais não nulas.

(2,0) 5. Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) + U(t,x) = 0, & \text{para } t \in]0,+\infty[,\ x \in]0,1[, \\ U(0,x) = \cos 2\pi x, & \text{para } x \in [0,1], \\ \frac{\partial U}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t,1) = 0, & \text{para } t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

(2,0) 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e satisfazendo

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento em série de Fourier desta função e a soma da série.

(2,0) 7. Considere a série trigonométrica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k^3}.$$

Justifique que a função definida por esta série é diferenciável e determine a série trigonométrica que representa a derivada.

(2,0) 8. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função de Heaviside* definida por

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

e define-se $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ via $f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \cdot H(\pi/2 - t)$. Determine a transformada de Laplace de f e aproveite para resolver o problema

$$\begin{cases} y' - y = f, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2,0) 9. Decida se existem ou não funções $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$g(t) = \int_0^t |\operatorname{sen} s||g(s)| + (g(s))^2 \, ds + t.$$

(2,0) 10. Seja P um polinómio de coeficientes reais, D o operador de diferenciação e Λ um número real maior que qualquer uma das partes reais das raízes de P. Se y for uma solução de $P(D)y = \operatorname{arctg} t$ mostre que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) e^{-\Lambda t} = 0.$$