Análise Matemática IV
2º Exame

12 de Julho de 2000

Engenharia Electrotécnica (excepto Telecomunicações) e
Engenharia de Gestão Industrial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0) 1. Determine se existem ou não funções F inteiras (isto é, funções holomorfas em $\mathbb{C}$) cuja parte real seja

$$\Re(F(x+iy)) = u(x,y) = e^{-y}\cos x - e^{x}\cos y$$

em que $x, y \in \mathbb{R}$. Se optar pela afirmativa determine todas essas funções.

(2,0) 2. Seja $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. Calcule em função de w o valor de

$$I_w \equiv \oint_L \frac{\cos z}{z(z-w)}\,dz$$

em que L é a linha parametrizada por $z(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

(2,0) 3. Seja $M > 0$, $M \neq 1$ e considere os dois semicírculos cujo diâmetro é o segmento de recta definido por $\Im(z) = 0, |\Re(z)| \leq M$. Designe as fronteiras desses semicírculos por ∂S^+ e ∂S^- conforme estão contidos no semiplano $\Im(z) \geq 0$ ou no semiplano $\Im(z) \leq 0$ respectivamente. Calcule os dois integrais

$$\oint_{\partial S^\pm} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}\,dz$$

em função de M supondo $S^\pm$ percorrida uma vez no sentido directo. Justifique que um destes integrais permite calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx$$

e calcule o valor deste integral.

(2,0) 4. Determine o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z, válido para $|z| > 1$, da função $h(z) = e^{iz^2} + \frac{z}{(1-z^2)^2}$.

(2,0) 5. Considere uma equação diferencial

$$y + (xy + x \log x) y' = 0.$$

Determine se a equação tem um factor integrante só dependente de uma das variáveis e em caso afirmativo use essa informação para determinar a sua solução geral.

(2,0) 6. Considere a equação diferencial

$$y''' - y' = \cos t.$$

Determine a solução geral desta equação e caracterize todos os $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que a solução satisfazendo $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, $y''(0) = \gamma$ é uma função limitada em $[0, +\infty[$.

(2,0) 7. Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) + U(t,x) = 0, & \text{para } t \in \,]0,+\infty[, \ x \in \,]0,1[, \\ U(0,x) = \cos 2\pi x, & \text{para } x \in [0,1], \\ \frac{\partial U}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t,1) = 0, & \text{para } t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

(2,0) 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e satisfazendo

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento em série de Fourier desta função e a soma da série.

(2,0) 9. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função de Heaviside* definida por

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

e define-se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ via $f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \cdot H(\pi/2 - t)$. Determine a transformada de Laplace de f e aproveite para resolver o problema

$$\begin{cases} y' - y = f, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2,0) 10. Decida se existem ou não funções $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$g(t) = \int_0^t |\operatorname{sen} s||g(s)| + (g(s))^2 \, ds + t.$$