Análise Matemática IV
2º Teste / 1º Exame

26 de Junho de 2000

Engenharia Electrotécnica (excepto Telecomunicações) e Engenharia de Gestão Industrial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Vire a página para realizar o 2º teste

(2,0) **I.** 1. Considere a equação diferencial

$$ty' - 2y = te^{1/t}.$$

Determine a solução geral desta equação e a solução particular que satisfaz $y(1) = 1$.

(2,0) 2. Determine todas as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas da forma[1] $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + x$.

(2,0) 3. Considere o triângulo T de vértices -2, 2, $\alpha + 2i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, em $\mathbb{C}$ e a função meromorfa g definida por

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-i)^2}.$$

Determine para que valores de α o(s) pólo(s) de g estão na fronteira do triângulo T, ∂T, e para os restantes calcule

$$\oint_{\partial T} g(z)\, dz$$

em que ∂T é percorrida "uma vez no sentido directo".

(2,0) 4. Determine o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z, válido para $1 < |z| < 2$, da função $h(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-2}$.

(2,0) 5. Sabendo que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ use os integrais

$$\int_{S_R} e^{-z^2}\, dz$$

com S_R, $R > 0$, a fronteira do sector circular definido por $0 \leq |z| \leq R$, $\Re(z) \geq \Im(z) \geq 0$, para calcular

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \cos(x^2)\, dx.$$

[1] O enunciado desta pergunta foi corrigido em relação ao enunciado no exame.

(1,5) **II.** 1. Determine a solução geral do problema $y^{(4)} - y = \cos x$.

(1,5) 2. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} u' &= u + v \\ v' &= u - w \\ w' &= v + w \end{cases}$$

Determine a sua solução geral $(u(t), v(t), w(t))$.

(2,0) 3. Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) + U(t,x) = 0, & \text{para } t \in]0,+\infty[, \ x \in]0,1[, \\ U(0,x) = \operatorname{sen} \pi x, & \text{para } x \in [0,1], \\ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \operatorname{sen} 3\pi x, & \text{para } x \in [0,1]. \\ U(t,0) = U(t,1) = 0, & \text{para } t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

(2,0) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e satisfazendo

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ \operatorname{sen} t, & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento em série de Fourier desta função e a soma da série.

(1,5) 5. Uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ possui transformada de Laplace

$$G(s) = \frac{(s-1)e^{-s}}{s^2 - 2s + 2}.$$

Determine g.

(1,5) 6. Considere uma equação diferencial da forma $y' = h(t,y)$ em que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, não negativa, periódica na variável t de período 1 (isto é $h(t+1,y) = h(t,y)$ para todos os t e y) e satisfazendo

$$h(t,y) \geq 1 + y^2, \qquad \text{para } t \in [1/2, 1] \text{ e todo o } y.$$

Mostre que não existem soluções daquela equação definidas no intervalo $[0,+\infty[$.