Análise Matemática IV
1º Teste

6 de Maio de 2000

Engenharia Electrotécnica (excepto Telecomunicações) e
Engenharia de Gestão Industrial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) 1. (a) Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x+iy) = \varphi(x^2 - y^2) + i\psi(xy), \qquad \text{com } x, y \in \mathbb{R},$$

em que φ e ψ são funções reais de variável real diferenciáveis. Mostre que se f é holomorfa φ e ψ devem ter derivadas constantes e aproveite para determinar todos os possíveis f.

(4,0) (b) Seja $R > 0$. Considere o integral

$$I(R) \equiv \oint_{L_R} \frac{e^z}{z^3+1}\, dz$$

em que L_R designa a linha definida pelo caminho

$$z(t) = \begin{cases} Re^{-t/\pi + it}, & \text{para } t \in [0, 2\pi], \\ R[(t-2\pi)(1-e^{-2}) + e^{-2}], & \text{para } t \in [2\pi, 2\pi+1]. \end{cases}$$

Determine $I(R)$ nos casos em que as singularidades da função integranda não se encontram sobre L_R.

(4,0) (c) Seja $\rho > 0$. Considere as linhas fechadas que se obtêm percorrendo o segmento de recta unindo $-i\rho$ a $i\rho$ e uma das semi-circunferências centradas em 0 e raio ρ contidas em cada um dos semiplanos $\Re(z) \geq 0$ e $\Re(z) \leq 0$. Designe essas linhas, percorridas "uma vez no sentido directo", por C_ρ^+ e C_ρ^-. Para $\rho > 1$ calcule

$$\oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz$$

e utilize um desses cálculos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\, dy.$$

(4,0) (d) Decida se existe ou não uma função holomorfa $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ com uma singularidade essencial em 0 e tal que

$$\oint_\gamma z^j h(z)\, dz = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1, \\ \frac{2\pi i}{(j+1)!} & \text{se } j \geq -1. \end{cases}$$

em que $j \in \mathbb{Z}$ e γ é uma qualquer circunferência centrada em 0 percorrida "uma vez no sentido directo".

2. Considere uma equação diferencial da forma $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$.

(2,0) (a) Determine em que circunstâncias uma tal equação diferencial possui um factor integrante só dependente do produto xy.

(2,0) (b) Aproveite o resultado anterior para determinar uma solução de

$$\begin{cases} y - \frac{y^2}{x} + (x+y)y' = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$