Análise Matemática IV
Cursos de Física e Matemática

Primeiro Exame de Primeira Época

20 de Junho de 1995

Justifique todas as suas respostas

(2,0) **1** a) Classifique a forma diferencial definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy$$

quanto a ser: i) fechada; ii) exacta.

(2,5) b) Calcule

$$\int_V \omega$$

em que

$$V = \{(x,y,z,t)\} \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2 = t < 1\}$$

e $\omega = (t-1)\,dx \wedge dy \wedge dz + ye^{zt}\,dy \wedge dz \wedge dt$.

(2,5) **2** a) Considere funções $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que as suas restrições aos eixos coordenados satisfazem, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ix & \qquad f(iy) &= -y - y^2 \\ g(x) &= x^2 + ix & \qquad g(iy) &= y + y^2 \end{aligned}$$

Decida se f e g podem ou não ser funções inteiras, isto é, analíticas em $\mathbb{C}$. Em cada caso, se optar pela afirmativa, decida se existem uma ou mais funções nestas condições e determine-a(s).

(2,5) b) Seja $R > 0$. Calcule em função de R

$$\oint_{L_R} \frac{1}{z(e^z-1)^2}\,dz$$

em que L_R é a linha representada parametricamente em $\mathbb{C}$ por $z(t) = \frac{1}{R}\cos t + iR\,\mathrm{sen}\,t$, com $t \in [0, 2\pi]$ e em que R é tal que nenhuma singularidade da função integranda está sobre L_R.

3 Considere uma equação diferencial da forma

$$y' + P(t)y = Q(t)y^\alpha$$

com $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

(1,5) a) Mostre que existe $\beta \equiv \beta(\alpha)$ tal que a substituição $v(t) = y^\beta(t)$ transforma a equação numa equação diferencial linear de primeira ordem.

(1,5) b) Aproveite o resultado da alínea anterior para resolver o problema

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t} = y^2, \\ y(1) = c > 1. \end{cases}$$

(1,0) c) Seja $g(t, y)$ uma função de classe C^1 satisfazendo $g(t, y) \geq 1$ para $t \geq 1$ e $y \geq 0$. Mostre que não há soluções de

$$\begin{cases} y' = g(t, y)(y^2 - \frac{y}{t}), \\ y(1) = c > 1. \end{cases}$$

definidas em $[1, e^{1/c}]$.

(2,5) **4** Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + e^{-2t}. \end{cases}$$

(2,0) **5** Determine $u(x, y)$ definida em $[0, 2\pi[\times[0, +\infty]$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = x, & \\ u(x, 0) = -x & \text{para } x \in [0, 2\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \operatorname{sen}^3 x & \text{para } x \in [0, 2\pi], \\ u(0, y) = 0 & \text{para } y^3 0, \\ u(2\pi, y) = -2\pi & \text{para } y^3 0. \end{cases}$$

[**Sugestão**: $w(x, y) = u(x, y) + x$.]

(2,0) **6** Determine os valores de c_k, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [t - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \operatorname{sen}(kt)]^2 \, dt$$

seja mínimo. Será o mínimo 0? Determine em que pontos a série $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \operatorname{sen}(kt)$ converge pontualmente e a respectiva soma.