Análise Matemática IV
Cursos de Física e Matemática

Segundo Exame de Primeira Época

11 de Julho de 1995

Justifique todas as suas respostas

(1,5) **1** a) Considere a forma diferencial

$$\omega = e^x\,dx - \frac{z}{y^2+z^2}\,dy + \frac{y}{y^2+z^2}\,dz.$$

Decida se esta forma é fechada. Se optar pela afirmativa decida se é exacta.

(1,5) b) Considere a variedade-2 definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (\sqrt{y^2+z^2} - 2)^2 = 1\}$$

e defina uma orientação o de V à sua escolha. Calcule $\int_{V^o} \alpha$ em que

$$\alpha = x\sqrt{y^2+z^2}\,dy \wedge dz + y(\sqrt{y^2+z^2} - 2)\,dz \wedge dx + z(\sqrt{y^2+z^2} - 2)\,dx \wedge dy.$$

(2,0) **2** a) Considere funções $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfazem, para $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = in^2 \qquad g(i/n) = -1/n^2.$$

Decida se cada uma das funções f e g pode ou não ser uma função inteira, isto é, analítica em $\mathbb{C}$. Se optar pela afirmativa decida se existem uma ou mais funções nestas condições. Se optar pela existência de uma única função determine-a. Se optar pela existência de mais do que uma dê exemplo de pelo menos duas.

(2,0) b) Calcule

$$\oint_L \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\,dz$$

em que L é a linha representada parametricamente em $\mathbb{C}$ por

$$z(t) = 2\cos t + 2i \operatorname{sen} 2t,$$

com $t \in [0, 2\pi]$.

(2,0) **3** a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y^{(4)} - y = \cos t.$$

(2,0) b) Considere uma equação diferencial da forma

$$G(y'', y', y) = 0.$$

Mostre que pode transformá-la numa equação diferencial de primeira ordem para uma função $v(y)$ ao considerar $y'(t) = v(y(t))$.

Aproveite para determinar a solução geral de $y'' = yy'(1 + (y')^2)$. O que é que pode dizer sobre a unicidade de solução sob condições adicionais $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$?

(2,0) **4** Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = 1 - t^2.$$

Determine os coeficientes a_k e b_k em

$$s(t) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}(kt)$$

de maneira a $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s(t)|^2 \, dt = 0$. Decida se existem ou não pontos onde as séries sejam divergentes ou $s(t) f(t)$.

5 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ um aberto[1] com fronteira $\partial\Omega$. O problema de Dirichlet para o operador de Laplace relativo a Ω consiste em dada uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua[2] determinar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica com parte real u, isto é, $u(x, y) = \Re f(x + iy)$ para $x + iy \in \Omega$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(1,0) a) Mostre, a partir das condições de Cauchy-Riemann, que a parte real u de f é uma função harmónica.

(1,0) b) Justifique, que se $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma uma função diferenciável então g definida por $g(z) = F(1/z)$ é uma função analítica em $W = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 1/z \in \Omega\}$.

(1,5) c) Deduza das duas alíneas anteriores que $U(x, y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ é uma função harmónica.

(1,5) d) Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > 1/4, (y - \frac{1}{2})^2 + x^2 > 1/4, x > 0, y > 0\}$. Qual é a imagem de S através da inversão $z \mapsto 1/z$?

(2,0) e) Resolva o problema de Dirichlet para o laplaciano quando $\Omega = S$, com S definido na alínea anterior, as condições na fronteira de Ω são

$$u\left(\frac{1}{2}(1 + \cos t), \frac{1}{2} \operatorname{sen} t\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4 \operatorname{sen}^2 t + 1}\right)$$

para $t \in [0, \pi/2]$, u vale 0 nos restantes pontos da fronteira de Ω e

$$\lim_{(x,y)\to\infty} u(x, y) = 0.$$

[1] A notação $\cong$ significa que identificamos os dois espaços da maneira natural.
[2] No caso em que Ω não é limitado é natural adicionar condições suplementares no ∞.