Análise Matemática IV
Cursos de Física e Matemática

Exame de Segunda Época

Setembro de 1995

Justifique todas as suas respostas

(2,0) **1** a) Considere a forma diferencial $\omega = \eta + \xi$ em que

$$\eta = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, \qquad \xi = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx - \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\,dy,$$

Decida se ω é ou não exacta em cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \quad B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),\ (1,0)\}$$

$$C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0^2 x^2 1\}.$$

(1,5) b) Considere $T = \{x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n : \forall_i x_i{}^3 0,\ \sum_{i=1}^n x_i{}^2 1\}$. Calcule

$$\int_{T^+} d\alpha$$

em que α é uma $(n-1)$ forma diferencial de classe $C^1(\overline{T})$ que se anula sobre os hiperplanos $x_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, e cuja restrição ao hiperplano H definido por $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ satisfaz

$$\alpha(x) = g(x) \sum_{i=1}^n \widehat{dx_i} \qquad \text{se } x \in H$$

para uma certa função $g : H \to \mathbb{R}$.

[**Note que** $\widehat{dx_i} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$.]

(2,5) **2** a) Calcule

$$\oint_L \frac{\operatorname{sen} z}{(z^4-1)}\,dz$$

em que L é a linha representada parametricamente em $\mathbb{C}$ por $z(t) = (t-\pi)^2 e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

(2,5) b) Considere uma função analítica $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$, em que $R > r > 0$, que satisfaz a seguinte propriedade

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^j e^{ijt}}\,dt = 1, \qquad \text{para todo o } j \in \mathbb{N}_0.$$

Decida se existe ou não uma tal função. Se optar pela afirmativa determine o maior valor possível para R.

(2,5) **3** a) Determine a solução $y(x)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2}, \\ y(1) = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verifique as seguintes propriedades das soluções:

1. A solução pode ser prolongada ao intervalo $]0, +\infty[$;
2. $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$.

(2,0) b) Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{x^2}\right), \\ u(1) = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Justifique as seguintes propriedades das soluções:

1. A solução pode ser prolongada ao intervalo $]0, +\infty[$;
2. $\lim_{x \to 0^+} u(x) = 0$.

(2,5) **4** Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

(2,5) **5** Determine $u(t,x)$ definida em $[0, 2\pi[\times [0, +\infty]$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0, & \\ u(0,x) = \operatorname{sen}^3 x & \text{para } x \in [0, 2\pi], \\ u(t,0) = u(t, 2\pi) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

(2,0) **6** Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = t^3.$$

Determine os coeficientes a_k e b_k em

$$s(t) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}(kt)$$

de maneira a $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s(t)|^2 \, dt = 0$. Decida se existem ou não pontos onde as séries sejam divergentes ou $s(t) f(t)$.