Análise Matemática IV

Exame de Segunda Época

16 de Julho de 1992

Justifique todas as suas respostas

(2,5) **1** a) Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x+iy) = u(x,y) + ie^{-x}(x\cos y + y\,\mathrm{sen}\, y)$$

em que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar u de maneira a

$$\oint_L f(z)\,dz = 0$$

para toda a linha fechada regular L no plano complexo. Na afirmativa calcule uma tal função u.

(2,5) b) Considere, para $R > 0$, o caminho C_R definido em $\mathbb{C}$ por

$$z(t) = \begin{cases} t & \text{para } t \in [-R, R] \\ Re^{i(t-R)} & \text{para } t \in [R, R+\pi] \end{cases}$$

e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq R, R^{-1}, \mathrm{Im}(\alpha) \neq 0$. Calcule

$$\oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-\alpha)(\alpha z - 1)}\,dz.$$

Use esse cálculo para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha(x^2+1) - (\alpha^2+1)x}\,dx.$$

(1) c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que 0 é um polo de ordem k de h e para $j \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\,dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{(j+2)!} & \text{para } j \geq -2 \\ 0 & \text{para } j < -2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa determine k e calcule o desenvolvimento de Taylor de $z^k h(z)$ em torno de 0 e o respectivo raio de convergência.

(2,0) **2** a) Determine uma solução do problema

$$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y(1) = \sqrt{5} \\ y'(1) = -5. \end{cases}$$

Discuta a unicidade da solução.

(2,0) b) Determine em que condições uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

tem um factor integrante que é função de $x - y$, isto é, da forma $\mu(x-y)$ para uma certa função μ, real de variável real . Determine uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ. Determine a solução geral de

$$\frac{1}{x^2 - y^2} + 2 + \left(\frac{1}{x^2 - y^2} - 2\right) y' = 0.$$

(2,5) **3** Determine a solução particular do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{e^t}{e^{-t}+1} \end{cases}$$

que satisfaz $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

(2,5) **4** Determine $u(x,y)$ contínua e definida em $[-1,1] \times [0,+\infty[$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 6x, & \\ u(-1,y) = -u(1,y) = -1 & \text{para } y \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = x^3 + \operatorname{sen}^3(\pi x) & \text{para } x \in [-1,1], \\ \lim_{y\to\infty} u(x,y) - x^3 = 0 & \text{para } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

5 Determine justificadamente uma função $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja:

(2,0) a)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{e^{-s}}{s^3 + 2s^2 + s}$$

(1,5) b)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(\{\})(\int) = \frac{\mathcal{G}(\int)}{\int}$$

em que G designa a transformada de Laplace da função definida por $t \log t$ para $t > 0$.

(1,5) **6** Considere a equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

em que ϵ é um parâmetro real. Escreva um sistema de primeira ordem equivalente. Determine os respectivos pontos de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio escreva o respectivo sistema linearizado e analise a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema original.