Análise Matemática IV

Segundo Exame de Primeira Época

30 de Junho de 1992

Justifique todas as suas respostas

(2,5) **1** a) Considere funções $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que para $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+iy) = \alpha(x) - 3xy^2 + i(3x^2y + \beta(y)).$$

Decida se pode ou não escolher α e β de maneira a f ser uma função analítica. Em caso afirmativo determine α e β de maneira a $f(1) = i$.

(2,5) b) Seja $R > 0$. Considere o caminho fechado L_R em $\mathbb{C}$ definido por

$$z(t) = \begin{cases} it, & \text{para } -R \leq t < R, \\ R(-\operatorname{sen}(t-R) + i\cos(t-R)), & \text{para } R \leq t \leq R+\pi. \end{cases}$$

Calcule

$$\oint_{L_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 3z + 2}\, dz$$

para todos os valores de R tais que L_R não contém singularidades da função integranda.

(1) c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \to \mathbb{C}$ tal que

$$\oint_C \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \frac{1}{j} \qquad \text{para } j \in \mathbb{N}$$

e para alguma circunferência C centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio sufiente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa calcule o desenvolvimento de Taylor de $h(z)$ em torno de 0 e o respectivo raio de convergência.

(2,0) **2** a) Considere a família de curvas no plano definidas por $x^4 + y^4 = C$ com $C > 0$. Determine a equação da linha que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que é ortogonal às curvas da família dada.

(2,0) b) Determine em que condições uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

tem um factor integrante que é função de x/y, isto é, da forma $\mu(x/y)$ para uma certa função μ, real de variável real . Determine uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ. Determine a solução geral de

$$2x^2y^2 + xy + (3x^3y + 2x^2)y' = 0.$$

(2,5) **3** Determine a solução particular do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + \frac{e^{-t}}{e^t+1} \end{cases}$$

que satisfaz $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

(2,5) **4** Determine $u(x,y)$ contínua e definida em $[0,1] \times [0,1]$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \\ u(x,1) = \operatorname{sen}^3(\pi x) & \text{para } x \in [0,1], \\ u(1,y) = \varphi(y) & \text{para } y \in [0,1], \\ u(x,0) = u(0,y) = 0 & \text{para } x, y \in [0,1], \end{cases}$$

nos dois casos seguintes: a) $\varphi(y) = 0$, b) $\varphi(y) = \operatorname{sen}^3(\pi y)$.

(1,5) **5** Seja $f(x) = |x \cos x|$. Determine os coeficientes a_n, b_n da série de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

relativa a f.

(2,0) **6** Determine uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{se^{-2s}}{(s^2+1)^2}.$$

(1,5) **7** Considere a equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon\frac{dx}{dt} - x + x^3 = 0$$

em que ϵ é um parâmetro real. Escreva um sistema de primeira ordem equivalente. Determine os respectivos pontos de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio escreva o respectivo sistema linearizado e analise a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema original. [**Sugestão:** No caso $\epsilon = 0$ tente arranjar uma equação diferencial de primeira ordem para as órbitas $y(x)$ do sistema.]