Análise Matemática IV

Primeiro Exame de Primeira Época

11 de Junho de 1992

Justifique todas as suas respostas

(2,5) **1** a) Considere funções $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que para $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+iy) = e^{-y}\cos x - 2xy + iv(x,y).$$

Decida se pode ou não escolher v de maneira a f ser uma função analítica. Em caso afirmativo determine todas as possíveis funções v.

(2,5) b) Calcule

$$\oint_L \frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z}\, dz$$

em que L é a linha representada parametricamente em $\mathbb{C}$ por $z(t) = 2\cos t + 1 + i \operatorname{sen} t$, com $t \in [0, 2\pi]$.

(1) c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \to \mathbb{C}$ tal que

$$\oint_C \frac{h(z)}{z^j}\, dz = j! \qquad \text{para } j \in \mathbb{N}$$

e para alguma circunferência C centrada em 0 e com raio sufiente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa calcule o respectivo desenvolvimento de Taylor em torno de 0.

(2,5) **2** a) Determine se a equação diferencial $x^2y - (x^3+y^3)y' = 0$ tem factores integrantes só dependentes da variável y. Em caso afirmativo determine o factor integrante e a solução geral da equação. Determine soluções particulares que satisfaçam $y(1) = -1$ e $y(1) = 0$.

(2,0) b) Determine uma função real de variável real $y(t)$ tal que

$$\begin{cases} y'' \operatorname{sen} y' = \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -\pi/2. \end{cases}$$

O que pode dizer sobre a unicidade de solução deste problema?

(2,5) **3** Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \cos t. \end{cases}$$

(2,0) **4** Determine $u(t,x)$ definida em $[0,2\pi] \times [0,+\infty[$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \cos x, \\ u(0,x) = \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen} x & \text{para } x \in [0,2\pi], \\ u(t,0) = u(t,2\pi) & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

[**Nota**: É fácil determinar uma solução particular da equação.]

(2,0) **5** a) Determine uma função $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\, f(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+s+1}.$$

(1,5) b) Use integração por partes para estabelecer uma equação diferencial ordinária de primeira ordem satisfeita pela transformada de Laplace da função $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Determine a solução geral da equação. Use $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ para estabelecer por mudança de variáveis uma condição inicial. Calcule $G(s)$, a transformada de Laplace de g, para $s \in \mathbb{R}$.

(1,5) **6** Considere a equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon x^2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

em que ϵ é um parâmetro real. Escreva um sistema de primeira ordem equivalente. Determine os respectivos pontos de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio escreva o respectivo sistema linearizado e analise a estabilidade do ponto de equilíbrio. [**Sugestão:** Considere o sistema em coordenadas polares.]