Análise Matemática IV

Exame de Época Extraordinária*

27 de Novembro de 1992

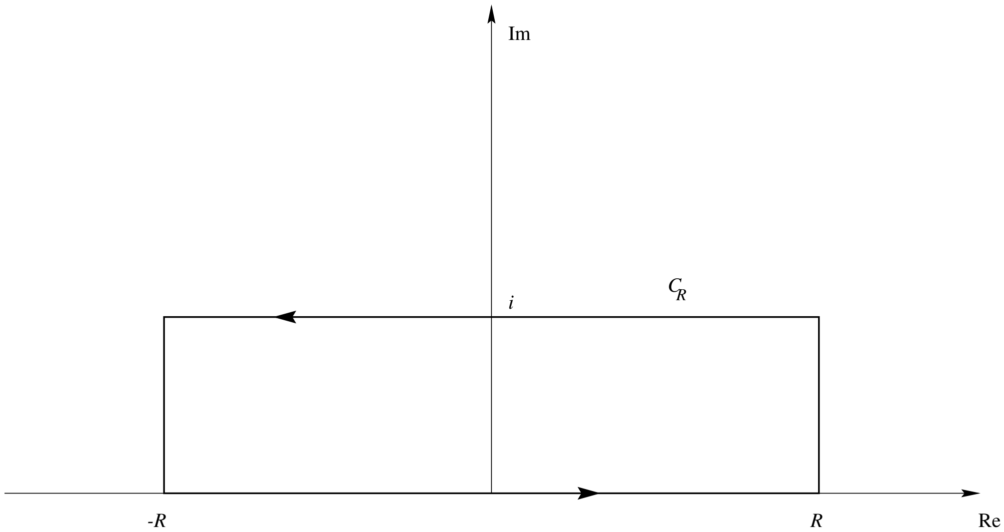
Justifique todas as suas respostas

(2,5) **1** a) Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x+iy) = e^{-x}(\operatorname{sen} y + g(x)) + ie^{-x}(\cos y + h(y))$$

em que $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções desconhecidas. Decida se pode ou não determinar g e h de maneira a para cada ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ existir uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_{z_0,n}(z-z_0)^n$ em que $z = x+iy$, que representa f numa vizinhança de z_0. Na afirmativa calcule todos os possíveis pares de tais funções g e h.

(2,5) b) Considere, para $R > 0$, o caminho C_R em $\mathbb{C}$ sugerido pela figura e percorrido no sentido indicado. Calcule



$$\oint_{C_R} e^{-z^2}\, dz.$$

Use esse cálculo para relacionar os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x)\, dx.$$

(1) c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \to \mathbb{C}$ tal

*Para alunos militares, O.S., atletas de alta competição, etc.

que para $j \in \mathbb{N}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{para } j \geq 2 \\ 0 & \text{para } 0 \leq j < 2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa determine h e o "maior" U possível.

(2,0) **2** a) Determine a solução do problema

$$y' = \frac{x+y}{x-y}\,, \qquad y(1) = 0.$$

O que é que pode afirmar sobre a unicidade de solução deste problema?

(2,0) b) Determine em que condições uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

tem um factor integrante que é função de xy, isto é, da forma $\mu(xy)$ para uma certa função μ, real de variável real . Determine uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ. Determine a solução geral de

$$\frac{1}{x^2y + xy^2} + 3x + \left(\frac{1}{x^2y + xy^2} + \frac{x^2}{y}\right) y' = 0.$$

(2,5) **3** Determine a solução particular do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

que satisfaz $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

(2,5) **4** Determine uma função $u(x,y)$ contínua e definida em $[0,1]\times[0,1]$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{para } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) = u(1,y) = 0 & \text{para } y \in [0,1], \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \operatorname{sen}^3(\pi x) & \text{para } x \in [0,1]. \end{cases}$$

5 Determine justificadamente uma função $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja:

(2,0) a)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2+s+1}.$$

(1,5) b)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{1}{s}G(s+1)$$

em que G designa a transformada de Laplace da função definida por $\sqrt{t}e^{-t}$ para $t > 0$.

(1,5) **6** Considere o sistema diferencial não-linear de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

Determine os respectivos pontos de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio escreva o respectivo sistema linearizado e analise a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema original.