Sejam $B_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ a bola de centro na origem e raio r em $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Z \geq \sqrt{x^2+4y^2}\}$ o interior do cone de base eliptica no plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$. Considere-se a função:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto \int_{C \cap \partial B_r} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot n dV_2 \end{aligned}$$

em que n designa a normal exterior unitária a ∂B_r. Vamos provar que Θ é uma função constante.

Sejam a, b reais com $a \leq b$. Para vermos o pretendido, basta ver que $\Theta(a) = \Theta(b)$. Considere-se para tal o conjunto:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2, z \geq \sqrt{x^2+4y^2}\}$$

A fronteira de V é $(\partial C \cap B_{a,b}) \cup (\partial B_a \cap C) \cup (\partial B_b \cap C)$, uma variedade de dimensão 2 com cantos ($B_{a,b}$ designa o conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$). Considere-se também a função:

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Esta função é C^∞ no fecho de V. Podemos então aplicar o teorema da divergência para concluir que:

$$\int_V div(f) = \int_{\partial C \cap B_r} f \cdot n_{ext} + \int_{\partial B_a \cap C} f \cdot n_{ext} + \int_{\partial B_b \cap C} f \cdot n_{ext}$$

onde n_{ext} designa a normal exterior a ∂V. Sobre $\partial B_b \cap C$ a normal exterior a ∂V coincide com a normal exterior a ∂B_b portanto $\int_{\partial B_b \cap C} f \cdot n_{ext} = \Theta(b)$. Sobre $\partial B_a \cap C$ a normal exterior é menos a normal exterior a ∂B_a e portanto $\int_{\partial B_a \cap C} f \cdot n_{ext} = -\Theta(a)$. Vamos agora determinar a normal exterior unitária a $\partial C \cap B_r$. Temos que este conjunto está contido em $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - 4y^2 = 0\}$. Sabemos que o espaço normal a $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - 4y^2 = 0, z > 0\}$ é gerado pelo vector $D(z^2 - x^2 - 4y^2)$ isto é $(-2x, -8y, 2z)$. Então a normal exterior unitária a C é

$$\frac{(2x, 8y, -2z)}{(x^2+16y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Note-se que podia apenas ser esta ou menos esta, é uma questão de acertar os sinais a partir da reperesentaçao gráfica do conjunto. Sobre ∂C:

$$f \cdot n_{ext} = \frac{(x,y,z) \cdot (2x, 8y, -2z)}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+16y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Assim:
$$f \cdot n_{ext} = \frac{2(x^2 + 4y^2 - z^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}(x^2 + 16y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$
Mas em ∂C, $2(x^2 + 4y^2 - z^2) = 0$ portanto $f \cdot n_{ext} = 0$ e $\int_{\partial C \cap B_r} f \cdot n_{ext} = 0$.
Assim temos:
$$\int_V div(f) = 0 - \Theta(a) + \Theta(b).$$
Mas fazendo as contas com calma, é fácil concluir que $div(f) = 0$ em todo o V e temos então o pretendido.