Análise Matemática I

2ª data de exame

31 de Janeiro de 2002

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente e Engenharia Aeroespacial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(9,0) **I.** 1. Estude a existência dos limites das sucessões definidas por:

$$\text{a) } a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}, \quad \text{b) } b_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k}\right).$$

e calcule-os quando existam.

2. Estude quanto a convergência as séries:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}, \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(1+\log n)n^{3/2}}.$$

3. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = (x^2 + x + 2)^{\varphi(x)}.$$

Exprima $\psi'(0)$ em termos de $\varphi(0)$ e $\varphi'(0)$.

4. Considere o conjunto A definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x+1) \leq 1\} \cap \mathbb{Q}.$$

a) Estude A quanto à existência (em $\mathbb{R}$) de supremo, ínfimo, máximo e mínimo.

b) Decida se uma função definida e contínua em $]-1, +\infty[$ e limitada numa vizinhança de -1 é necessariamente limitada em A. Se a sua resposta for afirmativa decida se existem necessariamente pontos de máximo e mínimo absoluto dessa função em A.

(7,0) **II.** 1. Considere uma função real de variável real g definida por

$$g(x) = \operatorname{arctg}(e^{1/x}).$$

a) Determine o domínio e o domínio de diferenciabilidade de g e calcule g'.

b) Esboce o gráfico de g tomando em consideração o comportamento perto de 0, a existência e classificação de pontos de extremo local, crescimento, sentido de concavidades[1] e existência de assímptotas.

2. Calcule os limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^{x^3} - 1}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to +\infty} x e^{1/x} - x.$$

3. Determine o limite quando $x \to 0$ da derivada de ordem 39 da função

$$x \mapsto \frac{e^{x^3} - 1}{x^3}.$$

[**Nota**: Obviamente que não se pretende que derive trinta e nove vezes a função.]

4. Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função definida por

$$\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

e o maior intervalo em que a série representa a função.

(4,0) **III.** Seja $H : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]0, +\infty[$ satisfazendo

$$\begin{aligned} H(0) &= 0, \\ H'_d(0) &= -1, \text{ (derivada à direita em 0)} \\ \lim_{x\to+\infty} H(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Define-se ainda uma outra função $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ via

$$F(x) = (H(x))^3 - H(x).$$

a) Calcule $F'_d(0)$.

[1] Limite-se a determinar uma expressão cujo sinal permita determinar o sentido da concavidade e determinar este para $|x|$ "pequeno" e $|x|$ "grande".

b) Mostre que existe $\overline{x} > 0$ tal que $F(\overline{x}) = 0$.

c) Mostre que o contradomínio de F é da forma $[\alpha, +\infty[$ para um certo $\alpha \leq 0$.

d) Supondo adicionalmente que H é duas vezes diferenciável mostre que existe pelo menos um $x > 0$ tal que $F''(x) = 0$.