

Capítulo 1

Os problemas

1.1 $\mathbb{R}$.

Apresente todos os cálculos.

1.1.1 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-1|}{(x-1)(x+2)} \geq 1 \right\}, \\ B &= \left\{ \frac{(-1)^n}{n} - 3, n \in \mathbb{N}_1 \right\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} \geq 1 - \frac{2}{x} \right\}. \end{aligned}$$

- a) Identifique como união de intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$ os conjuntos A e C .
- b) Para cada um dos conjuntos A , B e C , identifique os respectivos conjuntos de majorantes e minorantes.
- c) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o mínimo e o máximo de cada um dos conjuntos A , B , C , $C \cap \mathbb{Q}$, $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \cup C$.

1.1.2 Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que

$$\forall x \in A \exists y \in B \quad y \leq x.$$

- a) Se B é um conjunto minorado, mostre que A também é minorado e temos $\inf B \leq \inf A$.
- b) Por meio de exemplos, mostre que se pode ter:
 - (i) B majorado e A não majorado.
 - (ii) A minorado e B não minorado.

1.1.3 Mostre que

$$n^n \geq n \cdot n!, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

1.2 Sucessões

Apresente todos os cálculos e justificações.

1.2.1 Seja a_n o termo geral de uma sucessão convergente de termos em $]0, 1[$. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

- a) A sucessão de termo geral $(-1)^n a_n$ é limitada.
- b) A sucessão de termo geral $(-1)^n a_n$ é convergente.
- c) A sucessão de termo geral a_{2n}/a_{2n+1} é convergente.
- d) A sucessão de termo geral a_n/n é convergente.

1.2.2 Decida se são ou não majoradas, minoradas, limitadas, convergentes as sucessões de termos gerais:

- a) $\frac{n^2}{n+1}$
- b) $\frac{\pi^n}{\pi^{n+1}+e^n}$
- c) $\sqrt[3]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

1.2.3 Considere uma sucessão definida por:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, a_1 = c \\ a_{n+2} &= a_{n+1}a_n\end{aligned}$$

- a) Justifique que se $c = 1$ a sucessão converge e diverge se $c = -1$.
- b) Mostre, usando o método de indução matemática, que se $|c| > 1$ então $|a_n| > |c|$ para $n \geq 3$.
- c) Mostre, usando de novo o método de indução matemática e o resultado anterior, que se $|c| > 1$ então $|a_n| > |c|^n$ para $n \geq 3$ e justifique que, neste caso, a sucessão de termo geral a_n é divergente.
- d) Estabeleça resultados análogos aos anteriores quando $|c| < 1$.

1.3 Séries

Apresente todos os cálculos e justificações.

1.3.1 Determine a natureza (simplesmente convergente, absolutamente convergente, divergente) de cada uma das seguintes séries:

a) $\sum \frac{n!}{(2n-1)!}$

b) $\sum \frac{\operatorname{sen}(n^3)}{n^3}$

c) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+3^n}$

d) $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{1/4}} \right)$

1.3.2 Calcule a soma ou justifique a divergência de cada uma das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\pi-\sqrt{2})^{2n}}$

b) $\sum_{n=4}^{+\infty} \left[\frac{n!}{n!+1} - \frac{(n+1)!}{(n+1)!+1} \right]$

1.3.3 Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessões tais que:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
- $|b_n| \leq n^{-3/2}$ para $n \in \mathbb{N}_1$.

Discuta a natureza da série $\sum a_n b_n$.

1.3.4 Estude, em função de $x \in \mathbb{R}$, a convergência simples ou absoluta ou divergência da série de potências

$$\sum \left(\frac{n+1}{n} \right)^n x^n.$$

1.4 Funções

1.4.1 Determine o domínio, domínio de diferenciabilidade e obtenha expressões para as derivadas das funções definidas pelas fórmulas

$$\begin{aligned}f(x) &= 2^{\operatorname{arctg} x} \\g(x) &= \operatorname{arcsen}(\log x) \\h(x) &= x^{\operatorname{arctg} x} \\\phi(x) &= \frac{\log(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

1.4.2 Considere $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} e^x - 1, & \text{se } x \geq 0, \\ x \operatorname{sen}(1/x) \operatorname{arctg} x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- a) Estude ψ quanto a continuidade.
- b) Estude ψ quanto a diferenciabilidade e obtenha uma expressão para a derivada onde esta estiver definida [**Observação:** tome particular atenção ao que se passa para $x = 0$.]

1.4.3 Considere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = e^{|(x-2)(x+3)|} - 1.$$

- a) Estude φ quanto a diferenciabilidade e obtenha uma expressão para φ' nos pontos em que existir derivada.
- b) Determine os intervalos de monotonia de φ , indicando, se existirem, os pontos de máximo e mínimo (locais e absolutos) de φ .
- c) Determine justificadamente o contradomínio de φ .

Capítulo 2

Algumas soluções

2.1 $\mathbb{R}$

1 (1.1.2) a) Suponhamos então B minorado. Seja $x \in A$. Então existe $y \in B$ tal que $y \leq x$. Mas $-\infty < \inf B \leq y$ pois o $\inf B$ é um minorante de B . Temos então $-\infty < \inf B \leq y \leq x$. Como x era um qualquer elemento de A concluímos que A é minorado e, em particular, que $\inf B$ é um dos seus minorantes.

2 (1.1.3) Para provarmos que a desigualdade é verdadeira vamos usar o método de indução matemática. Para $n = 1$ a desigualdade é trivialmente verdadeira. Suponhamos agora que é verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$ e queremos mostrar que é verdadeira com n substituído por $n + 1$.

Tentamos primeiro da seguinte forma

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1) \geq n^n(n+1) \geq nn!(n+1) = (n+1)!n$$

em que na segunda desigualdade se usou a hipótese de indução, isto é, assumiu-se $n^n \geq nn!$. Infelizmente a desigualdade que obtivemos não é a que procurávamos que seria

$$(n+1)^{n+1} \geq (n+1)!(n+1).$$

No entanto o trabalho inicial não foi em vão pois agora podemos melhorar o argumento facilmente da seguinte forma (corresponde a, no segundo passo, só minorar $n+1$ por n em $n-1$ factores)

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= (n+1)^{n-1}(n+1)^2 \geq n^{n-1}(n+1)^2 = n^n(n+1)^2/n \\ &\geq nn!(n+1)^2/n = n!(n+1)^2 = (n+1)!(n+1).\end{aligned}$$

2.2 Sucessões

- 3 (1.2.1)** a) $|(-1)^n a_n| = |a_n| \leq 1$ pelo que a sucessão $((-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.
- b) A afirmação é falsa porque existem sucessões com as propriedades indicadas e tais que $((-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente. Basta considerar o exemplo da sucessão constante definida por $a_n = 1/2$ que torna $(-1)^n a_n = (-1)^n / 2$.
- c) Se $\lim a_n = a \neq 0$ teríamos $\lim a_{2n}/a_{2n+1} = c/c = 1$. A questão é saber se no caso de $\lim a_n = 0$ podemos ter (a_{2n}/a_{2n+1}) divergente. Uma maneira natural de obter um tal exemplo é observar que devemos procurar uma sucessão em que a razão (a_{2n}/a_{2n+1}) seja de alguma forma “grande” ou por outras palavras em que $a_n \rightarrow 0$ muito rapidamente. Um tal exemplo é $a_n = 1/n!$ em que $a_{2n}/a_{2n+1} = 2n + 1 \rightarrow +\infty$.
- d) $|a_n/n| \leq 1/n \rightarrow 0$ pelo que o resultado é verdadeiro sendo sempre $\lim a_n/n = 0$.

2.3 Séries

4 (1.3.3) Como a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente será limitada, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|a_n| \leq C$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Daí que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n b_n| \leq C n^{-3/2}.$$

Como a série $\sum n^{-3/2}$ é convergente podemos garantir, usando convergência absoluta e o critério de comparação, que $\sum a_n b_n$ é convergente.