Análise Matemática I

1ª data de exame

17 de Janeiro de 2002

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente e Engenharia Aeroespacial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7,0) **I.** 1. Estude a existência dos limites das sucessões definidas por:

$$\text{a) } a_n = \log\left(\operatorname{sen}(n\pi/2) + \cos(1/n) + 1\right), \quad \text{b) } b_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$$

e calcule-os quando existam.

2. Estude quanto a convergência as séries:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}, \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{2^n}.$$

3. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ uma função diferenciável e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \left(\varphi(x^2+1)\right)^{x^2}.$$

Exprima ψ' em termos de φ e φ'.

4. Considere o conjunto A definido por

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : e^{x-\sqrt{3}} \geq 1\right\}.$$

a) Estude A quanto à existência (em $\mathbb{R}$) de supremo, ínfimo, máximo e mínimo.

b) Decida se uma sucessão de termos em $A \cap [0,2]$ possui necessariamente subsucessões convergentes. E será o limite necessariamente um elemento de A?

(8,0) **II.** 1. Considere uma função real de variável real g definida por

$$g(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

a) Determine o domínio e o domínio de diferenciabilidade de g e calcule g'.

b) Esboce o gráfico de g tomando em consideração a existência e classificação de pontos de extremo local, crescimento, sentido de concavidades e existência de assímptotas.

2. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\operatorname{sen}(x^2)}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to +\infty} e^x \operatorname{arctg}(e^{-x}).$$

3. Decida se existe ou não um polinómio de grau menor ou igual a 3, $P(x)$, tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - P(x)}{x^3} = 0.$$

Se optar pela afirmativa determine um tal polinómio e decida se é ou não único.

4. Determine a série de MacLaurin relativa à função

$$H(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

e o maior intervalo em que a série representa a função.

(5,0) **III.** 1. a) Estude quanto a convergência a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\log(\log(n+1)) - \log(\log n)\right).$$

b) Use o teorema de Lagrange (valor médio) para obter a estimativa

$$0 \leq \log(\log(x+1)) - \log(\log x) \leq \frac{1}{x \log x}, \qquad \forall_{x>1}.$$

c) Use as duas alíneas anteriores para estudar a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}.$$

2. Seja $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Mostre que se F possui uma assímptota $y = \alpha x + \beta$ quando $x \to +\infty$ então existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to +\infty$ e

$$\lim_{n\to +\infty} F'(x_n) = \alpha.$$

b) Mostre que pode existir uma tal assímptota sem que $\lim_{x\to+\infty} F'(x)$ exista.

c) Decida se a existência de $\lim_{x\to+\infty} F'(x)$ finito garante a existência de uma assímptota da forma $y = \alpha x + \beta$ quando $x \to +\infty$. Se optar pela afirmativa demonstre o resultado. Caso contrário dê um contra-exemplo.