Análise Matemática I

1ª data de Exame

Campus de Lisboa (Alameda) **17 de Janeiro de 2001, 17 horas**

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7,0) **I.** 1. Determine para que valores dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ é que a função h real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xe^x), & \text{se } x > 0, \\ a\log(e^{x^2} + x) + b, & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine a derivada nesse(s) caso(s).

2. Estude a existência dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}, \qquad \text{b)} \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n - \pi/2},$$
$$\text{c)} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\operatorname{arctg} x - \pi/2}.$$

e calcule-os quando existam.

3. Considere as séries:

$$\sum \frac{1}{\operatorname{arctg} n}, \qquad \sum \frac{1}{\operatorname{arctg} n - \pi/2}, \qquad \sum \frac{1}{n(\operatorname{arctg} n - \pi/2)}.$$

Estude-as quanto a convergência.

4. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x-1)}{x+1} > 0 \right\}, B = \left\{ x \in [-1, 1] : 0 < |\operatorname{arcsen} x| \le \frac{\pi}{3} \right\}.$$

a) Exprima A e B como uniões de intervalos.

b) Determine, quando existirem, $\sup A$, $\inf(A \cap B)$, $\sup(B \cap \mathbb{Q})$, $\max(B \cap \mathbb{Q})$.

c) Decida se uma sucessão monótona de termos em B é necessariamente convergente para um ponto de B.

d) Decida se uma função $g : B \to \mathbb{R}$ contínua é necessariamente limitada. E se g tiver limites laterais finitos em 0?

(9,0) **II.** 1. Considere uma função real de variável real g definida por

$$g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

a) Determine o domínio e o domínio de diferenciabilidade de g e calcule g'.

b) Determine todas as assímptotas ao gráfico de g.

c) Estude g quanto à existência de pontos de extremo local, crescimento, sentido de concavidades e pontos de inflexão e esboce o gráfico de g.

2. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/(e^x+1)}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x(e^x-1)}$,

3. Determine um polinómio de quarto grau $P(x)$ tal

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^4(e^{1/\lambda^2} - P(1/\lambda)) = 0.$$

4. Determine a série de Taylor de potências de x (série de MacLaurin) relativa à função $F(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{(x-1)^2}$ e o maior intervalo em que a série representa a função.

(4,0) **III.** Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ diz-se *holderiana em* $x_0 \in A$ *com expoente* $p > 0$ se existirem $\epsilon, C > 0$ tais que

$$(|x - x_0| < \epsilon, x \in A) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|^p.$$

a) Mostre que se f é holderiana em x_0 então é contínua em x_0.

b) Mostre que se f é holderiana em x_0 com expoente $p > 1$ então é diferenciável em x_0 e calcule $f'(x_0)$.

c) Mostre que se f possui derivada contínua em A então f é holderiana com expoente 1 em todos os pontos de A.

d) Mostre que se não existe $p > 0$ tal que f é holderiana em x_0 então f não é diferenciável em x_0. Dê um exemplo de uma tal função.