



Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda

18 de Novembro de 2006, 9 horas

Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil,
Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais,
Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7) I. 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{1+x} \geq 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^x-1} \leq 0 \right\}.$$

- Mostre que $A \cap B =]-1, 0[$.
- Determine, se existirem em \mathbb{R} , $\sup A$, $\inf B$, $\sup(B \setminus A)$, $\sup((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$, $\max((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$.
- Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
 - Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem um sublimite em \mathbb{R} .
 - Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ tem limite em \mathbb{R} .
 - Toda a sucessão crescente de termos em $A \cap B \cap \mathbb{Q}$ tem limite em $A \cap B$.

(7) II. 1. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}, \quad \lim \frac{n(2\cos(n\pi)+1)}{n^2+1}, \quad \lim \frac{n!}{(2n)!+n!}.$$

2. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x^2+2)} \operatorname{arctg} x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1)\operatorname{sen} x.$$

(6) III. 1. Considere uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\operatorname{tg} x}.$$

- Determine o domínio de f .
- Estude f quanto a continuidade.
- Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x)$$

e decida se f é ou não prolongável por continuidade a $\frac{\pi}{4}$.

2. Considere uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) \geq x^2.$$

Mostre que existe $a \geq 0$ tal que $[a, +\infty[$ é o contradomínio de ϕ [Sugestão: Comece por mostrar que o contradomínio de ϕ é um intervalo não majorado.]